This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

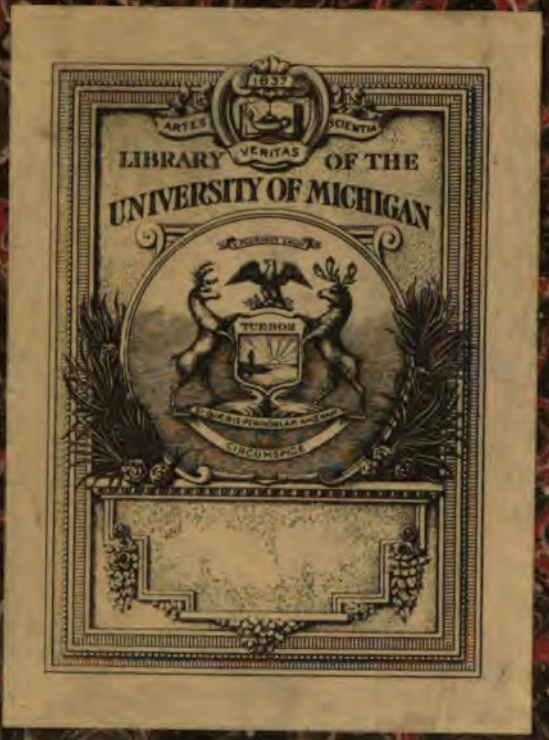
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

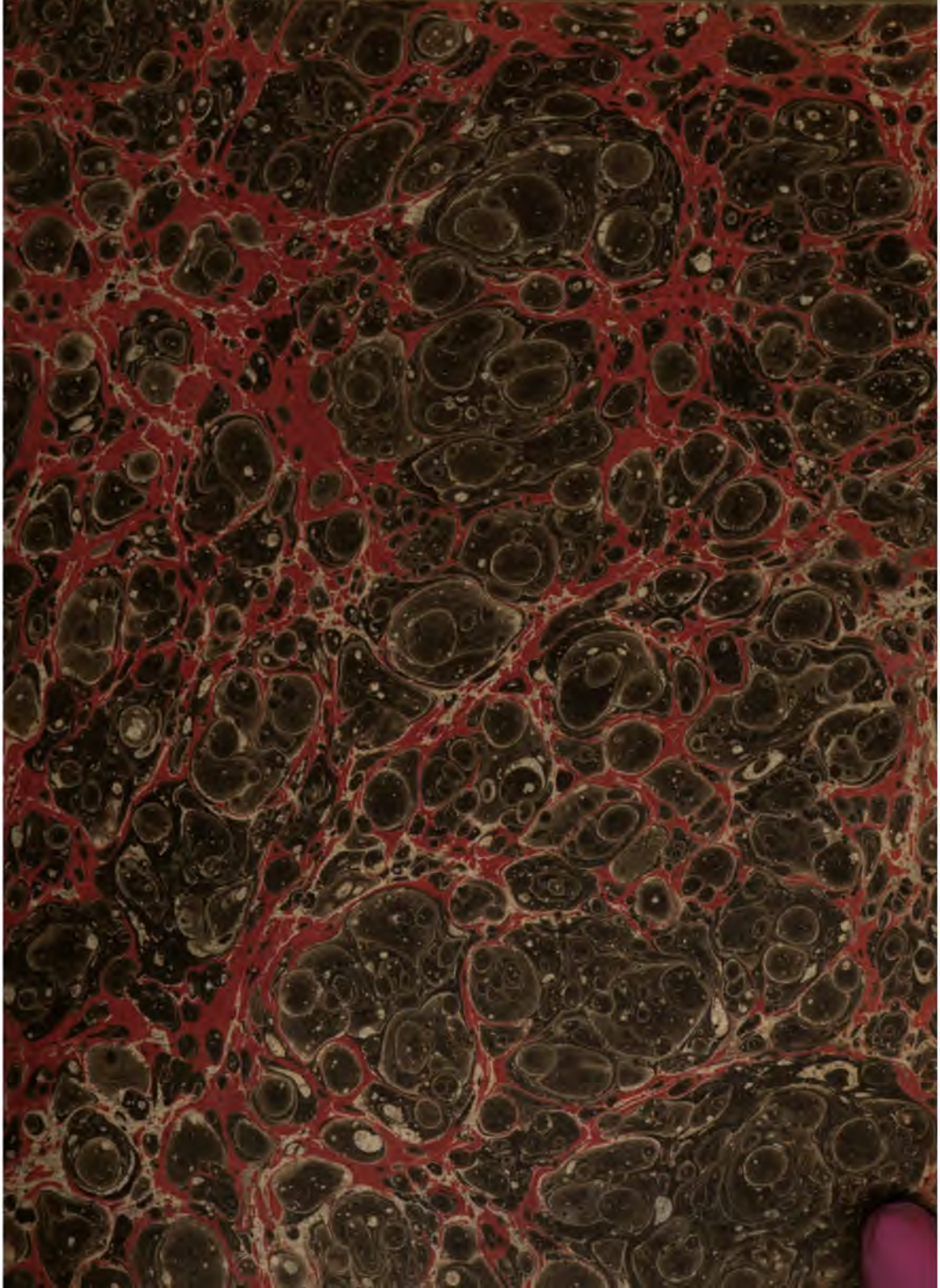
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



QA
35
.R367

DIE
GRUNDLEHREN
DER
ARITHMETIK
UND
DER ALGEBRA

AUS

DEN LEHRBÜCHERN, VORZÜGLICH DER
H. H. KAESTNER, UND LORENZ
AUSGEZOGEN,
UND ZUM GEBRAUCHE DER VORLESUNGEN
EINGERICHTET
VON

G. L. REINER
KANONIKUS UND PROFESSOR IN DEM
PRAEMONSTRATENSER COLLEGIATSTIFTE
STEINGADEN.

FÜSSEN
GEDRUCKT BEY BENEDIKT MAYR
1796.

* * *

Die *Mathematik*, welche von jeher die *erſte* unter den Wiſſenſchaften geweſen, und deren Werth zu allen Zeiten anerkannt worden iſt, gewährt nicht nur Kenntniſſe, die man nicht ohne Nutzen, und Vergnügen erlernt, und in denen Niemand, der auf Stand, und Erziehung Anſpruch macht, ein völliger Fremdling ſeyn darf: ſondern iſt auch, wegen ihrer vorzüglichen Methode Jedem, dem es um Bildung des Verſtandes zu thun iſt, nicht genugſam zu empfehlen.

Lorenz.

DEM

HOCHWÜRDIGEN HOCHWOHLGEBOHRNEN

HERRN

ABBTE GILBERT,

DES

PRAEMONSTRATENSER COLLEGIATSTIFTES

STEINGADEN

WÜRDIGSTEN PRAELATEN

MEINEM GNAEDIGEN

HERRN.

WORDSWORTH PRAELATUS

HENRY GRADDEN

HARRIS

13983

GNAEDIGER HERR!

Aus Ueberzeugung, dafs keine der Wiſſenſchaften, eine *gründlichere Religionskenntniſs vorbereite*, und mehr zur Bewunderung der Gröſse, Weisheit, und Güte *Gottes* führe, als das Studium der *Moral*, und der *Natur*, lieſsen SIE ſichs von dem Antritte IHRER lobwürdigſten Regierung ganz beſonders angelegen ſeyn, dieſe beyden Studien bey IHREN untergebenen Religioſen, einheimiſch zu machen. *Mir* übertrugen SIE das *Lehramt der Naturlehre*, und lieſsen es an keiner Art Unterſtützung gebrechen, wodurch die wiſſenſchaftliche Kenntniſs der Natur befördert werden kann. Die ſprechenden Beweiſe davon ſind: unſer *Kloſterbibliothek*, die nun jetzt mit einem Schatze von phyſikaliſchen Büchern pranget, den man in andern wohlhabendern Klöſtern umſonſt ſucht;

unſer ganz *neu angelegtes Muſäum*, das einen Apparat phyſiſcher, unter Direktion des H. Profeſſors Späth in Altdorf neu verfertigter Werkzeuge aufweiſet, an welchen kein Kenner, Einfachheit, Genauigkeit, und Reinlichkeit vermiſst; — und endlich das *neuerbaute chemiſche Laboratorium* das SIE mit allen, zur chemiſchen Unterſuchung der Körper nöthigen Geräthſchaften hinreichend verſehen lieſsen. —

Ich müſste das *Pflichtmäſsige*, das in dem, zu meinen, obſchon geringen, Kenntniſſen geſetzte Vertrauen liegt, gänzlich miſskennen, hätte ichs mir nicht zur unabänderlichen Maxime gemacht, IHREN wohlthätigen Abſichten nach Möglichkeit entſprechen, und die mir anvertrauten Schüler in den heiligen Geheimniſſen der

Na-

Natur einweihen zu wollen. Aber überzeugt, dafs nur derjenige feste und sichere Fortschritte in der *Naturkenntnifs* machen kann, der mit den Grundlehren der *reinen Mathematik* vertraut ist; foderte ich allererst meine Kräfte auf, diese Lehren, nach ihrem ganzen Umfange, unter meinen Schülern zu verbreiten, und legte bey meinem Vortrage derselben, die besten allgemein anerkannten Lehrbücher, vorzüglich der HH. *Käfiner* und *Lorenz* zum Grunde.

Gegenwärtiger Auszug enthält die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Ich hatte dabey die Absicht, denselben nicht nur als Leitfaden bey den öffentlichen *Prüfungen* meiner Schüler — (wozu er allernächst bestimmt ist) — sondern auch als *Grundrifs* zu den *Vorlesungen* über die benannten Zweige der reinen Mathema-

tik

tik brauchbar zu machen. Und einer meiner vorzüglichen Wünsche wird erfüllt seyn, wenn SIE, mein gnädiger HERR PRAELAT! diese meine Bemühung, die ich IHNEN zu überreichen wage, als einen öffentlichen Beweis meiner unbegränzten Ehrfurcht und Dankbarkeit, anzunehmen geruhen.

Unterthänig gehorsamster

G. L. Reiner.

Die reine Mathematik
im
Grundriſs.

Eingeführte Zeichen.

Das Zeichen der *Gleichheit* iſt (=)
der *Aehnlichkeit* (∽)
des *Gröſsern* (>)
des *Kleinern* (<)
des *Hinzuthuns* (+)
des *Hinwegnehmens* (—)
des *Vervielfältigens* (.) oder (×)
des *Theilens* (:)

Allgemeine Grundſätze.

1.) Iſt A = B; ſo iſt auch B = A.
2.) Iſt A = A; und A = (a + b + c) ſo iſt
3.) A > a; A > b; A > c; A > a + b; A > a + c; u. ſ. w.
4.) Iſt A = C; und B = C; ſo iſt A = B.

5.) Iſt

5.) Ist $A = B$; und $C = D$; so ist $A + C = B + D$

6.) Ist $A > B$; und $C = D$; so ist $A + C > B + D$.

7.) Ist $A = B$, $C = D$; so ist $A - C = B - D$.

8.) Ist $A > B$, und $C = D$; so ist $A - C > B - D$.

9.) Ist $A = B$; so ist $n \cdot A = n \cdot B$.

10.) Ist $A > B$; so ist $n \cdot A > n \cdot B$.

11.) Ist $A = B$; so ist $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$

12.) Ist $A > B$; so ist $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$.

I.

Die Arithmetik.

Der erste Abschnitt.

Von den gemeinen Rechnungsarten.

1.) Die Grundlehren von den Zahlen.

§. 1.

Erklärung. a.) Eine *Zahl* ist eine gewisse Menge von Dingen einerley Art, oder von Einheiten; *Dinge von einerley Art* heissen die, an denen man blos ihr Uebereinstimmiges betrachtet; und das, worinn mehrere Dinge übereinstimmen, ist die *Einheit*.

b.) Eine

LOUIS C. KARPINSKI
1315 CAMBRIDGE ROAD
ANN ARBOR, MICHIGAN

Noteworthy also that this book (Reiner) starts with a list of algebraical symbols and general theorems.

It should also be noted particularly that this work is a compilation from the works of Kaestner and Lorenz. -L.C.K.-

This mixture of arithmetic & algebra is rather interesting -

5.) Ist $A = B$; und $C = D$; so ist $A + C = B + D$

6.) Ist $A > B$; und $C = D$; so ist $A + C > B + D$.

7.) Ist $A = B$, $C = D$; so ist $A - C = B - D$.

8.) Ist $A > B$, und $C = D$; so ist $A - C > B - D$.

9.) Ist $A = B$; so ist $n \cdot A = n \cdot B$.

10.) Ist $A > B$; so ist $n \cdot A > n \cdot B$.

11.) Ist $A = B$; so ist $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$

12.) Ist $A > B$; so ist $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$.

I.

Die Arithmetik.

Der erste Abschnitt.

Von den gemeinen Rechnungsarten.

1.) Die Grundlehren von den Zahlen.

§. 1.

Erklärung. a.) Eine *Zahl* ist eine gewisse Menge von Dingen einerley Art, oder von Einheiten; *Dinge von einerley Art* heissen die, an denen man blos ihr Uebereinstimmiges betrachtet; und das, worinn mehrere Dinge übereinstimmen, ist die *Einheit*.

b.) Eine

b.) Eine Zahl heifst *benannt*, wenn ihr *Name*, d. i. die Art der Einheiten, aus denen sie besteht, zugleich angezeigt wird; *unbenannt* aber, wo dieses nicht geschieht.

Folgesätze. 1.) Nur *Dinge von einerley Art* lassen sich *zusammen zählen*, oder können eine Zahl ausmachen.

2.) Eine *Zahl* bleibt dieselbe, wenn die *Menge* ihrer Einheiten dieselbe bleibt, von welcher Art diese auch seyn mögen. Aber die *Gröfse*, welche durch die Zahl ausgedruckt wird, beruhet auf der *Gröfse der Zahl* selbst, und auf der *Gröfse der Einheiten*, aus denen die Zahl bestehet.

3.) Eine Zahl wird *vermehrt*, oder *vermindert*, je nachdem solche Einheiten, aus denen sie bestehet, zu ihr gesetzt, oder von ihr weggenommen werden.

§. 2.

Erklärung. a.) Eine Zahl S, welche zweyen, oder mehrern Zahlen A, B, C &c. zusammen genommen, gleich ist, heifst deren *Summe*.

b.) Zwey, oder mehrere Zahlen A, B, C, *addiren*, oder *zueinander setzen*, heifst deren *Summe* S finden. $A + B + C = S$.

Zusatz. $A + B = B + A$.

b.) Eine Gröſse A heiſst ein *aliquoter Theil* einer andern B; und die andre B ein *Vielfaches* der erſten A; wenn die erſte A, etlichemal zu ſich ſelbſt geſetzt, der andern B gleich wird.

Zuſatz. 1.) Jede Zahl iſt ein Vielfaches der Einheit und die Einheit ein aliquoter Theil jeder Zahl.

2.) Von zweyen Zahlen iſt jede entweder ein Vielfaches der andern, oder doch ein Vielfaches von irgend einem aliquoten Theil der andern.

§. 3.

Erklärung. a.) Wird von zweyen Zahlen, AB, BC — (den *Factoren*) — die eine AB — (der *Multiplicandus*) — ſo vielmal zu ſich ſelbſt addirt, als die andere BC der *Multiplicans*, Einheiten enthält: So heiſst die gefundene Summe ABCD ihr *Produkt*, oder *Factum*.

b.) Zwey Zahlen, AB, BC mit einander *multipliciren*, oder *vervielfältigen*, heiſst ihr Produkt ABCD finden. AB × BC = ABCD.

Zuſatz. 1.) In dem Produkte ABCD ſteckt der Multiplicandus AB ſo vielmal, als die Einheit im Multiplicans BC.

2.) In dem Produkte ABCD ſteckt der Multiplicans BC ſo vielmal, als die Einheit im Multiplicandus AB.

3.)

3.) $AB \times BC = BC \times AB$.

4.) Das Produkt entſtehet aus dem einen Factor ſo, wie der andere Factor aus der Einheit.

5.) Iſt $AB = AE + FB$; ſo iſt $AB.BC = AE.BC + FB.BC$, und $BC.AB = BC.AE + BC.FB$.

6.) Das Produkt $AG \times BC$ ſteckt im Produkte $AB \times BC$ ſo vielmal, als AG in AB.

7.) $AA = A^2$; $AAA = A^3$; $AAAA = A^4$; u. ſ. w.

§. 4.

Erklärung. a.) Wird von einer Zahl A eine kleinere B weggenomen; ſo heiſst der Reſt D, die *Differenz*, oder der *Unterſchied* der beyden Zahlen, der *Ueberſchuſs* der gröſsern über die kleinere.

b.) *Zwey* Zahlen A, B, voneinander *ſubtrahiren*, oder *wegnehmen*, heiſst ihre Differenz finden. $A - B = D$.

Zuſatz. 1.) $B + D = A$

2.) Wenn $A + B = S$ ſo iſt $S - A = B$, und $S - B = A$.

3.) $A + B - B = A$.

§. 5.

Erklärung. a.) Wird von einer Zahl ABCD, dem *Dividendus* eine andere AB, *der Diviſor*, wiederholentlich ſo oft weg-

ge-

genommen, bis von jener nichts mehr vorhanden ist; so heißt die Zahl BC, welche anzeigt, *wie oft* solche Wegnahme geschehen, der *Quotient* solcher Zahlen.

b.) Zwey Zahlen ABCD, AB *miteinander dividiren*, oder *durcheinander theilen*, heißt ihren *Quotienten* CD finden.

$$ABCD : AB, \text{ oder } \frac{ABCD}{AB} = CD.$$

Zusatz. 1.) $\frac{ABCD}{AB} = \frac{CD.}{1}$

2.) $AB \cdot BC = ABCD.$

3.) $\frac{AB \cdot BC.}{BC} = AB$; und $\frac{AB \cdot BC}{AB} = BC.$

4.) Ist $\frac{ABCD}{AB} = CD$ so ist $\frac{ABCD}{CD} = \frac{AB.}{1}$

Anmerk. Alle Veränderungen der Zahlen geschehen auf eine der §. 2. 3. 4. 5. angezeigten vier Arten, der Addition, Multiplication, Subtraction, und Division; welche daher die *gemeinen Rechnungsarten*, oder *Species der Arithmetik* heißen.

2. Die Gesetze der Dezimalzahlen.

§. 6.

Wahlsatz. a.) Hat man die Einheiten, oder die *Einer* immer bis zehen gezählt: so mache man aus jeden zehn Einern

ein

ein Zehend, oder *einen Zehner*. Mehrere ſolche *Zehner* zähle man wieder bis zehn, und mache aus jeden zehn Zehnern ein Zehend von Zehnern. Dieſes wiederhole man, ſo oft es beliebt, nur daſs man kürzer ſage: *Hundert* für zehn Zehner; *Tauſend* für zehn Hunderte; *zehntauſend* für zehnmal zehn Hunderte; *Hunderttauſend* für zehn Zehntauſende; *Million* für zehn Hunderttauſende; *Billion* für Millionmal Million u. ſ. w.

Zuſatz. 1.) Hierdurch erhält man auſſer den *Einern*, auch noch *zuſammengeſetzte Einheiten*, von verſchiedenen *Ordnungen*.

2.) Eine *Zahl* bleibt zwar an ſich dieſelbe; kann aber einen *höhern*, oder *geringern Werth* haben, je nachdem die *Einheiten* die ſie zählt, von *höherm*, oder *geringerm Werthe* ſind.

3.) Die *Namen* für die *erſten zehn* Zahlen ſind aus dem gemeinen Sprachgebrauche bekannt; ſo wie auch die *Namen* für jede *gröſsere Zahl*, die entweder die *Summe* einer *kleinern*, und der *zehn*, oder ein *Vielfaches der zehn*, oder die *Summe eines Vielfachen*, und *einer kleinern* iſt.

§. 7.

Wahlſatz. b) Zu *Zeichen* der Zahlen bediene man ſich der bekannten *arabiſchen Ziffern*, ſo, daſs jede derſelben eine gewiſse *Menge von Einheiten* bedeute, und der *Werth* ſolcher Einheiten durch die *Stelle* angezeigt werde, den die Ziffer von der rechten Hand gegen die linke nach den verſchiedenen Ordnungen der Einheiten einnimmt.

Zuſatz. 1.) Hiedurch erhalten die Millionen die *ſechſte* Stelle nach den Einern; die Billionen die *zwölfte*; die Trillionen die *achtzehende* u. ſ. w.

2.) $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; u. ſ. w.

3.) $7483 = 7.10^3 + 4.10^2 + 8.10^1 + 3$.

§. 8.

Aufgabe. 1.) Zwey Zahlen, wenn in einer derſelben, oder auch in beyden, den Ziffern *Nullen* beygefügt ſind, miteinander *zu multipliciren*.

Aufl. a.) A. 3000 × B. 2 ſo iſt AB = 2 × 3000

b) A. 3000 × B 200; ſo iſt AB = 2 × 300000

2.) Jede Zahl, die mit Ziffern geſchrieben iſt, mit Worten auszuſprechen; d. i. zu numeriren.

Aufl. a.) 384.257

b.)

b.) $54''''\,687.063''\,269.375\,683.725$.

Zusatz. 1.) Eine Zahl, die mit Worten in einer bekannten Sprache ausgedruckt ist, läßt sich leicht mit Ziffern schreiben.

2.) $5000 = 5.10^3 = 50.10^2 = 500.10^1$; oder
$432 = 4.10^2 + 3.10^1 + 2 = 43^1.10^1 + 2 = 42.10^1 + 12$. u. s. w.

3. Die Rechnung mit Decimalzahlen.

§. 9.

Aufgabe. 1.) Zwey, oder mehrere Zahlen zu einander *zu addiren.*

Auflös. A. 7 8 4 6 2 .
B. 5 9 0 3 .
C. 8 6 1 .
S. = 8 5 2 2 6 .

2.) Zwey Zahlen von einander *zu subtrahiren.*

Auflösung. A. 8 0 0 7 3 8 7
B. 6 4 5 9 7 8 4
D. = 1 5 4 7 6 0 3

Zusatz. Die *Addition* und *Subtraction* dienen einander zu Proben.

§. 10.

Aufgabe. 3.) Die *Pytägoriſche Tafel* oder das *Einmaleins*, d. i. die Produkte aller einziffrigen Zahlen zu finden.

Aufl. Man ſchreibe in der *oberſten* Reihe die 9. *Ziffern* neben einander; in der *zweyten* ihr *zweyfaches*, wenn man jede zu ihr ſelbſt addirt, in der *dritten* ihr *dreyfaches*, wenn man das Zweyfache zum Einfachen addirt, in der *vierten* ihr *Vierfaches* wenn man das Dreyfache zu den Einfachen addirt; ſo ferner ihr *Fünffaches* bis *Neunfaches*.

Zuſatz. 1.) Hieraus läſs ſich leicht zu zwey gegebenen Faktoren das gehörige Produkt; und zu einem gegebenen Produkte, und dem einen Faktor, der andere Faktor finden.

2.) Desgleichen wenn den einfachen Ziffern noch Nullen beygefügt ſind.

§. 11.

Aufgabe. 4.) Zwey Zahlen miteinander zu *multipliciren.*

Aufl.

A.	3 4 2 5 7 6
B.	5 2 0 3
C.	1 0 2 7 7 2 8
D.	6 8 5 1 5 2
E.	1 7 1 2 8 8 0
P.	1 7 8 2 4 2 2 9 2 8.

Auf-

Aufgabe. 5.) Zwey Zahlen mit einander zu *dividiren.*

Aufl.

A 1 7 8 2 4 2 2 9 2. 8. Q. 5 2 0 3.
D (3 4 2 5 7 6) 1 1
P 1 7 1 2 8 8 0 1 1
R 6 9 5 4 2 9 1 1
D (3 4 2 5 7 6) 1 1
P 6 8 5 1 5 2 1 1
R 1 0 2 7 7 2 8
D (3 4 2 5 7 6)
P 1 0 2 7 7 2 8
R 0

Zusatz. Die *Multiplication*, und *Division* dienen einander zu Proben.

Anm. Die Rechnung mit *benannten Zahlen* bedarf keiner neuen Regeln, nur muſs man wiſſen, wie viele Einheiten eines kleinern Namens auf eine Einheit des gröſsern gehen. Die Zahl, welche dieſes anzeigt, heiſst die *Reductionszahl.*

4. Die Abmeſſung der Zahlen.

Erklärung. Eine Zahl heiſt ein *Maaſs* der andern, wenn ſie ein aliquoter Theil der andern iſt, alſo in der andern aufgeht, d. i. wenn ſie die andere, ohne Reſt theilt.

Zusatz. 1.) Jede Zahl wird *von ihr selbst* und von der *Einheit* gemessen.

2.) Jede Zahl, die eine andere misst, kann nicht *grösser* als die andere seyn.

3.) Eine Zahl A, die B misst, muss auch die Zahl C messen, die von B gemessen wird.

4) Eine Zahl, die sich *halbiren*, d. i. durch zwey theilen lässt, ist eine *gerade* Zahl; eine *ungerade aber*, die sich *nicht halbiren* lässt, oder die von einer geraden um Eins unterschieden ist.

§. 13.

Erklärung. Eine Zahl, die blos von ihr selbst, und von der Einheit gemessen wird, ist eine *Primzahl*, *einfache Zahl*; eine *zusammengesetzte Zahl* aber, die auch noch von einer andern Zahl gemessen wird.

Zusatz. 1.) Jede *zusammengesetzte Zahl* wird von irgend einer *Primzahl* gemessen.

2.) Jede Zahl ist entweder eine *Primzahl*, oder wird von einer *Primzahl gemessen*.

§. 14.

Erklärung. 1.) Ein Maass mehrerer Zahlen heiss das *gemeine Maass* derselben; das *grösste gemeine Maass* mehrerer Zahlen ist, wenn

wenn sich kein gröfsers angeben läfst, welches in jeder dieser Zahlen aufgeht.

b.) Zahlen, die *aufser der Einheit* kein anderes gemeines Maafs haben, heifsen *Primzahlen zu einander*, oder *relative Primzahlen*.

Zusatz. 1.) Wenn man zwo ganze Zahlen A, B, durch ihr *gröfstes gemeines Maafs* dividiret; so sind die *Quotienten Primzahlen unter sich.*

2.) Wenn zwo ganze Zahlen A, B, jede *für sich* durch eine *dritte* ganze Zahl theilbar ist; so ist es auch ihre *Summe* A + B sowohl, als ihre *Differenz* A — B.

3.) Wenn die *Summe*, oder *Differenz* A ± B zwoer ganzen Zahlen *für sich*, und *eine* der Zahlen auch *für sich* durch M theilbar ist, so mufs es auch die *andere* seyn.

4.) Wenn die *gröfsere* Zahl A durch die *kleinere* B theilbar ist; so mufs die *kleinere* Zahl B, das *gröfste gemeine Maafs* der Zahlen A, B, seyn.

§. 15.

Lehrsatz Wenn von zwey ungleichen Zahlen A, B, die kleinere B in die gröfsere A dividirt, einen Rest R, und Quotienten Q giebt; der Rest R in den vorigen Divisor B einen

Quo-

Quotienten Q^{2te} und einen Reſt R^{2te} und ſo fort immer die Diviſion *jedes vorhergehenden Reſtes* mit dem *nächſtfolgenden* fortgeſetzt wird, bis der Reſt $= 0$ wird; ſo

a) iſt entweder der *Diviſor* bey der *nten* Diviſion, die ohne Reſt erfolgt iſt, > 1; und dann iſt er *das gröſste gemeine Maaſs*

1.) des *Diviſors*, und *Dividendus* bey dieſer *nten* Diviſion;

2.) des Diviſors, und Dividendus bey der $(n-1)$ *ten* Diviſion;

3.) des Diviſors, und Dividendus bey *jeder vorhergehenden*, $(n-2)$ ten; $n-3$ten u. ſ. w. Diviſion.

4.) und der *gegebenen Zahlen* A, B.

b) oder der *Diviſor* bey der *nten* Diviſion, die ohne Reſt erfolgt, iſt $= 1$; ſo haben

1.) der Diviſor, und Dividendus bey dieſer *nten* Diviſion.

2.) der Diviſor, und Dividendus bey der $(n-1)$ *ten Diviſion*;

3.) der Diviſor, und Dividendus bey *jeder vorhergehenden* Diviſion;

kein gemeines Maaſs; und

4.) die *gegebenen Zahlen* A, B. ſind *Primzahlen zueinander*.

Der

Der Beweis wird durch folgende Tafel anſchaulich.

$$\begin{array}{l} B \mid A \mid Q \\ \quad R \mid B \mid Q^{2te} \\ \quad\quad R^{2te} \mid R \mid Q^{3te} \\ \quad\quad\quad R^{3te} \mid R^{2te} \mid Q^{4te} \\ \quad\quad\quad\quad R^{4te} \text{ \&c. \&c.} \end{array}$$

§. 16.

Aufgabe. 1.) Für zwey Zahlen A, B, die nicht Primzahlen zueinander ſind, das gröſste gemeine Maaſs zu finden.

Auſl. a.) $B \mid A \mid Q = 4 \mid 8 \mid 2$
$R \qquad\quad o$

b.) $B \mid A \mid Q = 9 \mid 15 \mid 1$
$R \mid B \mid Q^1 = 6 \mid 9 \mid 1$
$R^1 \mid R \mid Q^2 = 3 \mid 6 \mid 2$
$R^2 \quad = \quad o$

2.) Für drey Zahlen A, B, C, die nicht Primzahlen zueinander ſind, das gröſste gemeine Maaſs zu finden.

Auſl. a) $A = 8 \quad B = 6. \quad C = 4$
$B \mid A \mid Q = 6 \mid 8 \mid 1$
$R \mid B \mid Q^1 = 2 \mid 6 \mid 3$
$R^1 \quad = \quad o$

$$R \mid \underline{C} \mid Q \qquad 2 \mid \underline{4} \mid 2$$
$$R^2 \qquad\qquad o$$

Aufl. b.) $A = 18\ B = 12.\ C = 4$

$$B \mid \underline{A} \mid Q \qquad = 12 \mid \underline{18} \mid 1$$
$$R \mid \underline{B} \mid Q^2 = \qquad 6 \mid \underline{12} \mid 2$$
$$R^2 \qquad\qquad o$$
$$C \mid \underline{R} \mid Q \quad = \quad 4 \mid \underline{6} \mid 1$$
$$r \mid \underline{C} \mid Q \qquad 2 \mid \underline{4} \mid 2$$
$$r^2 \qquad\qquad o$$

Anmerk. Auf eben diese Art findet man auch das *gröfste gemeine Maafs* für *vier* und *mehrere* Zahlen.

5. Die Rechnung mit Brüchen.

Erklärung. Wenn man *ein Ganzes* in etliche *gleiche* Theile eintheilet, und davon entweder *einen*, oder *etliche* nimmt; so heifst dieses Stück in Vergleichung mit dem Ganzen, ein *Bruch*, Fractio.

Zusatz. 1.) Zu einem Bruche sind zwey *Zahlen*, Glieder, Termini, nothwendig; die Zahl der Theile, *in welche* man das Ganze *getheilt* hat, der *Nenner*; und die Zahl der Theile, *die* man *nimmt*, der *Zähler*; diesen setzt man über einen Strich, den Nenner darunter.

2.) Von den Gliedern eines Bruches ist der *Zähler* die eigentliche Zahl, und der *Nenner* der Name. Dieser giebt dem Bruche den Namen, jener zählt die Menge der Theile, die ihn ausmachen.

3.) Ein Bruch ist das *Vielfache* von einem *gewissen Theile* des Ganzen, oder der Einheit.

4.) Ist das Ganze in gewisse Theile getheilt: so kann man einen solchen Theil so vielmal nehmen, dass solches

a) entweder *weniger als das Ganze* ausmacht — ein *ächter Bruch*, *Fractio vera*;

b.) oder *eben so viel*; — ein *uneigentlicher Bruch*;

c.) oder *mehr*; — ein *unächter Bruch*.

5.) Sollte man *von den Grössern*, die das Ganze ausmachen, *einige*, und noch ein *Stück* einer solchen Gröfse nehmen; so würde der *Zähler des Bruches* eine *gemischte Zahl*; sollten aber *von einer Gröfse* einige, und noch ein Stück solcher Gröfse *auf das Ganze* gehen, so würde der *Nenner* des Bruches eine *gemischte Zahl*.

6.) Die Brüche sind eigentlich Formeln, die den *Quotienten* aus der Division des Zählers mit dem Nenner anzeigen; und die man anstatt des Quotienten selbst gebrauchen kann; weswegen man sie auch als Quotienten ansieht.

§. 18.

Lehrſatz. Die *Gröſse* der Brüche beruhet bey *einerley Nenner* auf der *Gröſse der Zähler*; bey *einerley Zähler* auf der *umgekehrten Gröſse* der *Nenner*.

Beweis. Denn bey *einerley Nenner*, oder bey der *gleichen Gröſse der Theile* iſt ein Bruch um ſo vielmal gröſser, um ſo vielmal gröſser ſein *Zähler* iſt, oder *jemehr* man ſolcher Theile nimmt; — bey *einerley Zähler* hingegen, oder bey *der gleichen Anzahl* der Theile, iſt ein Bruch um ſo vielmal gröſser, um ſo vielmal kleiner ſein *Nenner* iſt; oder um *ſo vielmal gröſser* die Theile ſind.

Zuſatz. 1.) $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{4:2}$; $\frac{A}{B} \cdot D = \frac{A.D}{B} = \frac{A}{B:D}$

2.) $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{6}{7 \cdot 3}$; $\frac{A}{B} : D = \frac{A:D}{B} = \frac{A}{B.D}$

3) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$; $\frac{A}{B} = \frac{A.D}{B.D}$ und $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3}$; $\frac{A}{B} = \frac{A:D}{B:D}$

4.) $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$; $\frac{A}{B} \cdot B = A$

5.) $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4}{4}$; $A = \frac{A}{1} = \frac{A.B}{1.B}$

§. 19.

§. 19.

Erklärung. Einen Bruch *aufheben* heifst, ihn auf eine *kleinere*, oder die *kleinſte Benennung* bringen, oder ihn durch kleinere, oder die kleinſten Zahlen ausdrücken, *ohne ſeinen Werth zu ändern.*

Aufgabe. Einen Bruch aufzuheben.

$$\frac{1464 : 61}{4697 : 61} = \frac{24}{77}$$

Anmerkung. 1.) Haben *Zähler* und *Nenner* eines Bruchs die *Einheit* zum *gröſsten gemeinen Maaſse*: ſo läſst ſich der Bruch nicht aufheben.

2.) Eine *Methode*, Brüche aufzuheben iſt auch folgende:

$$\frac{2310}{9350} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{17 \cdot 5} = \frac{21}{85}$$

Man kann hier die ſchon berechneten Factorentafeln mit Nutzen gebrauchen.

§. 20.

Erklärung. Brüche *gleichnamig* machen, oder, *unter einerley Benennung* bringen, heifst, andere, den gegebenen, gleiche Brüche finden, die einerley Nenner, oder einen Generalnenner haben.

Aufgabe. Brüche gleichnamig zu machen.

Auſl. Aus $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ wird $\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}$ und $\frac{5\cdot 4}{7\cdot 4}$.

Aus $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ werden $\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{70}{105}$; $\frac{4}{5} = \frac{4\cdot 3\cdot 7}{5\cdot 3\cdot 7} = \frac{84}{105}$

und $\frac{6}{7} = \frac{6\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 3\cdot 5} = \frac{90}{105}$.

§. 21.

Aufgabe. 1.) Brüche zu *addiren*; oder zu *ſubtrahiren*.

Auſl. $\frac{3}{4} \mp \frac{5}{9} = \frac{3\cdot 9 \mp 5\cdot 4}{4\cdot 9} = \frac{27 \mp 20}{36}$

und $5 \mp \frac{6}{7} = \frac{5}{1} \mp \frac{6}{7} = \frac{5\cdot 7 \mp 6}{7} = \frac{35 \mp 6}{7}$

Zuſatz. 1.) $4\frac{2}{3} = \frac{4\cdot 3 \mp 2}{3}$; und $4 - \frac{2}{3} = \frac{4\cdot 3 - 2}{3}$

2.) $8\frac{3}{4} \mp 3\frac{2}{3} = \frac{35}{4} \mp \frac{11}{3} = 8 \mp 3 \mp \left(\frac{3}{4} \mp \frac{2}{3}\right)$

Eben ſo iſt $5 - \frac{6}{7} = 4 \mp \frac{1}{7}$.

§. 22.

§. 22.

Aufgabe. 2.) Brüche miteinander zu *multipliciren*, oder zu *dividiren*.

Aufl. der Multiplication

$$\frac{9}{14}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{9}{14}\cdot 2\right):3=\frac{9\cdot 2}{14\cdot 3}=\frac{9:3}{14:2}.$$

So auch; $\frac{10}{11}\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{10}{11}\cdot 2\right):5=\frac{10\cdot 2}{11\cdot 5}=\frac{(10:5)\cdot 2}{11}$

So auch $\frac{33}{35}\cdot\frac{7}{8}=\left(\frac{33}{35}\cdot 7\right):8=\frac{33\cdot 7}{35\cdot 8}=\frac{33}{(35:7)\cdot 8}$

Zusatz. $\left(4\frac{2}{3}\right)\cdot\left(2\frac{3}{4}\right)=\frac{14}{3}\cdot\frac{11}{4}=\frac{14\cdot 11}{3\cdot 4}$

Aufl. der Division.

$$\frac{21}{32}:\frac{3}{8}=\left(\frac{21}{32}:3\right)\cdot 8=\frac{21}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{21\cdot 8}{32\cdot 3}=\frac{21:3}{32:8}=\frac{7}{4}$$

So auch $\frac{12}{17}:\frac{4}{9}=\left(\frac{12}{17}:4\right)\cdot 9=\frac{12}{17}\cdot\frac{9}{4}=\frac{(12:4)\cdot 9}{17}=\frac{27}{17}$

So auch $\frac{17}{24}:\frac{5}{8}=\left(\frac{17}{24}:5\right)\cdot 8=\frac{17\cdot 8}{24\cdot 5}=\frac{17}{(24:8)\cdot 5}=\frac{17}{15}$

Zusatz. 1.) $\left(4\frac{2}{3}\right):\left(2\frac{3}{4}\right)=\frac{14}{3}:\frac{11}{4}=\frac{14}{3}\cdot\frac{4}{11}.$

2.)

2.) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$.

Anmerk. Eine *benannte* Zahl, sie mag ganz, oder gebrochen seyn, wird *reducirt*, d. i. auf den kleinern, oder gröfsern Namen gebracht, wenn man dieselbe mit der *Reductionszahl* im ersten Falle *multiplicirt*, im zweyten *dividirt*.

6.) Die Rechnung mit entgegengesetzten Gröfsen.

§. 18.

Erklärung. *Entgegengesetzte Gröfsen* heifsen Gröfsen von einerley Art, die man zugleich in solcher Beziehung betrachtet, dafs sie einander ganz, oder zum Theil aufheben.

Zusatz. 1.) Man *bezeichnet* die eine der entgegengesetzten Gröfsen mit (+) und die andere mit (−); und nennt die Gröfsen mit dem ersten Zeichen *bejahende*, oder *positive*; mit dem zweyten, *verneinende*, oder *negative* Gröfsen.

2.) Es ist willkührlich, welche von beyden Gröfsen man *positiv*, oder *negativ* nennen will. Bey allen entgegengesetzten Gröfsen legt man aber immer die *positive Einheit* zum Grunde, so dafs alle Zahlen, die aus solcher Einheit selbst entstehen, *positiv* sind,

sind, und die *negativen* Zahlen erhalten werden, wenn man das, der positiven Einheit Entgegengesetzte etlichemal nimmt.

3.) Keine Gröfse ist *an sich negativ*; sondern wird es erst *durch die Entgegensetzung* mit dem Positiven, und bedeutet alsdann nicht blos den *Mangel* des Positiven, sondern seine *Beraubung*.

4.) Das *Kleinere* hebt in entgegengesetzten Gröfsen *so viel* auf, *als es selbst beträgt*; und der *Rest muss* von der *Art des Gröfsern* seyn, das sowohl *positiv*, als *negativ* seyn kann.

5.) Sind *gleiche* Gröfsen einander *entgegengesetzt*; so heben sie einander ganz auf, dafs *Null* der Rest wird. Dieses hat veranlafst, die *negativen* Gröfsen *weniger als Nichts* zu nennen, das man aber nur in *Beziehung auf die ihr entgegengesetzte* Gröfse, nicht aber *überhaupt* sagen kann; daher ist $0 - 3$ kein richtiger Ausdruck.

6.) $A + B - B = A + 0 = A$.

§. 24.

Aufgabe. 1.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen *zueinander zu addiren.*

Aufl. + 26 − 8 + 16 − 4 = + 42 − 12 = + 30

− 32 + 12 + 38 + 8 = + 70 + 26 = − 50

2.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen voneinander zu *subtrahiren.*

Aufl. Von + A abgezogen + B = A − B

Von + A abgezogen − B = A + B

denn + B + (A − B) = A

− B + (A + B) = A

Zusatz. Eine Grösse wird *addirt*, wenn man sie *mit ihrem Zeichen* hinzusetzt; *subtrahirt*, wenn man sie mit dem *entgegengesetzten Zeichen* hinzusetzt.

§. 25.

Lehrsatz. Bey der *Multiplication* sowohl, als bey der *Division*, bringen *einerley Zeichen* was *Bejahendes*, *verschiedene Zeichen* aber was *Verneinendes* hervor; in so fern nämlich die Einheit überall bejahend angenommen wird.

Beweis. 1.) *Für die Multiplication.* So wie die *bejahende Einheit* in dem einen *bejahenden* Faktor steckt; so steckt auch der zweyte

a) *bejahende* Faktor in dem *bejahenden* Produkte;

b) *verneinde* Faktor, in dem *verneinenden* Produkte.

Und so, wie das *Entgegengesetzte der bejahenden* Einheit in dem einen *verneinenden Faktor* steckt; so steckt auch das *Entgegengesetzte* des zweyten

a)

a) *bejahenden* Faktors in dem *verneinenden*,

b) *verneinenden* Faktors in dem *bejahenden* Produkte.

Beweis für die Diviſion. So wie der *bejahende Diviſor* in dem *bejahenden Dividendus*; oder der *verneinende Diviſor* in dem *verneinenden Dividendus* ſteckt; ſo ſteckt auch die *bejahende Einheit* in dem *bejahenden Quotienten.*

Und ſo, wie das *Entgegengeſetzte des verneinenden Diviſor* in dem *bejahenden Dividendus*, oder des *bejahenden Diviſors*, in dem *verneinenden Dividendus* ſteckt; ſo ſteckt auch das *Entgegengeſetzte der bejahenden Einheit* in dem *verneinenden Quotienten.*

Aufgabe. 1.) Zahlen mit einerley, oder verſchiedenen Zeichen, miteinander *zu multipliciren.*

Aufl. $+9-4-8+7=+4$

$+7-4=+3$

$+36+16+32-28$

$+63-28-56+49$

$+27+12+24+21 \quad \text{c.} \quad \text{c.}$

2.) Zahlen mit einerley, oder verſchiedenen Zeichen mit-

einander *zu dividiren.*

$+56-35$

Aufl. $= +8-5$

$+7$

Anmerkung. Das Weitere von der Rechnung mit entgegengesetzten Gröfsen, findet man im Folgenden.

7. Die Rechnung mit Buchstaben.

§. 26.

Wahlsatz. Die *Buchstaben des Alphabeths* werden als *allgemeine* Zeichen *unbestimmter* Gröfsen gebraucht, und zwar die *erstern* für *bekannte*, und *gegebene*, die *letztern* für *unbekannte*, und *gesuchte* Gröfsen. Für die *Rechnungsarten* dienen die *gewöhnlichen arithmetischen Zeichen*; nur dafs man bey den *Produkten* auch das Zeichen *beliebig weglässt*, und die Buchstaben blos neben einander setzt.

Zusatz. 1.) $a + b$ heifst die *Summe* der beyden Zahlen a, und b; $a - b$ ihre *Differenz*; $a . b$, oder $a \times b$, oder ab ihr *Produkt*; $a : b$, oder $\frac{a}{b}$ ihr *Quotient*.

2.) $3a = a + a + a$, das 3fache der Gröfse a; oder *allgemein* na das nfache derselben; a mag nun eine Zahl, oder eine bestimmte Einheit, oder was man will, bedeuten.

3.) $a^3 = a . a . a$; die 3te Potenz der Zahl a, oder *allgemein* a^n die nte Potenz der Gröfse a; und ma^n das

das mfache dieſer Potenz. Das, was in eine ſolche Potenz multiplicirt iſt, wie m, heiſst ihr *Coefficient*.

4.) $\sqrt[3]{a}$, die Cubikwurzel aus a; oder *allgemein* $\sqrt[n]{a}$, die nte Wurzel aus a; und $m\sqrt[n]{a}$, das mfache dieſer Wurzel.

5.) $5a + 3a = (5 + 3)a = 8a$; und $5a - 3a = (5 - 3)a = 2a$; oder allgemein $mx \mp nx = (m \mp n)x$.

6.) $px^n \mp qx^n = (p \mp q)x^n$; und

$p\sqrt[n]{x} \mp q\sqrt[n]{x} = (p \mp q)\sqrt[n]{x}$.

7.) $\frac{8ab}{4ac} = \frac{2b}{c}$; $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad \mp bc}{bd}$;

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

§. 27.

Aufgabe. Potenzen *von einerley Wurzel* mit einander zu *multipliciren*.

Auflöſ. $a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = a^5 = a^{3+2}$

Alſo mache man von ſolcher *Wurzel* eine *Potenz*, deren *Exponent* die *Summe der Exponenten der Factoren iſt*.

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Zuſatz. 1.) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = a^{6}$. allgemein $(x^{n})^{m} = x^{n\,m}$.

2.) $\sqrt[3]{a^{2}} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; allgemein $\sqrt[m]{x^{n}} = x^{\frac{n}{m}}$

3.) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{2}} = \sqrt[3]{25}$. allgemein $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^{n}}$.

4.) $(a\,b)^{m} = a^{m}\,b^{m}$; und $\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}$.

5.) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$.

6.) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

§. 28.

Aufgabe. Potenzen von *einerley Wurzel* miteinander *zu dividiren.*

Auflöſ. $\frac{a^{r}}{a^{s}} = \frac{a\,a\,a\,a\,a}{a\,a} = a\,a\,a = a^{3} = a^{r-s}$.

Alſo mache man von ſolcher *Wurzel* eine *Potenz*, deren *Exponent* die *Differenz der gegebenen Exponenten iſt*, ſo daſs nämlich vom Exponenten des Dividendus, der Exponent des Diviſors abgezogen werde. $\frac{x^{m}}{x^{n}} = x^{m-n}$

Zu-

Zusatz. 1. $\frac{x^m}{x^m} = 1 = x^{m-m} = x^0$.

2.) $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4} = a^{3-7} = a^{-4}$. Allgemein $\frac{a^{2m}}{a^{3m}} = a^{-m}$

3.) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; allgemein $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

4.) a) $x^m . x^{-n} = x^{m-n}$; und $x^{-m} . x^{-n} = x^{-(m+n)}$

b) $(x^{-m})^n = x^{-mn}$; und $(x^m)^{-n} = x^{-mn}$

c) $\frac{x^m}{x^{-n}} = x^{m+n}$; und $\frac{x^{-m}}{x^{-n}} = x^{n-m}$; und $\frac{x^{-m}}{x^n}$ $= x^{-(m+n)}$

5.) a.) $x^{\frac{m}{n}} . x^{\frac{m'}{n}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}}$; und $x^{\frac{m}{n}} : x^{\frac{m'}{n}} = x^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n}}$

b.) $(x^{\frac{r}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{r}{mn}}$. u. f. w.

§. 29.

Erklärung. 1.) Eine Gröſse, welche aus mehrern, durch + und − verbundenen Theilen beſteht, heiſst *vieltheilig*, *polynomiſch*; jede andere aber *einfach*, *mononomiſch*. Die einzelnen Theile einer vieltheiligen Gröſse, heiſsen ihre *Glieder*, oder *Namen*, und die Gröſse ſelbſt wird nach der Zahl der Glieder, *zweytheilig*, *dreytheilig*, u. ſ. w. *binomiſch*, *trinomiſch* &c. genannt.

An-

Anmerk. Wird eine *vieltheilige Gröſse* mit einer andern Gröſse, durch die arithmetiſchen *Zeichen verbunden* : ſo ſchlieſst man ſie gewöhnlich in eine *Parentheſe* ein. Einige ſetzen einen *Strich* über die Gröſsen.

2.) Eine *vieltheilige Gröſse*, welche *verſchiedene* Potenzen von *einerley Buchſtaben* enthält, wird nach ſolchem Buchſtaben *geordnet*, wenn man ihre Glieder ſo aufeinander folgen läſst, wie die *Exponenten der Potenzen* zu, oder abnehmen.

§. 30.

Aufgabe. 1.) Vieltheilige Gröſsen zu *addiren*, oder *zu ſubtrahiren*.

Aufl. $15a - 17b + 4c - 7d + 5e$
$6a - 19b - 7c + 3d - 9f$

Summe. $21a - 36b - 3c - 4d + 5e - 9f$

Differenz. $9a + 2b + 11c - 10d + 5e + 9f$.

Zuſatz. 1.) Iſt $x > y$ ſo iſt $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$

und $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$

2.) $2m + (2n + 1) = 2m + 2n + 1$; und
$2m + 1 + (2n + 1) = 2m + 2n + 2$

3.)

3.) $2m - (2n + 1) = 2m - 2n - 1$; und
$-2m + 1 - (2n + 1) = 2m - 2n.$

§. 31

Aufgabe. 2.) Vieltheilige Gröfsen *zu multipliciren.*

Aufl. 1.)
$$\begin{array}{r} 4d - cx + 1 \\ -4cx \\ \hline -16cdx + 4c^2x^2 - 8cx \\ 2.) \quad 3x^2 + 4ax + a^2 \\ 3x^2 - ac \\ \hline -3acx^2 - 4a^2cx - a^3c \\ +9x^4 + 12ax^3 + 3a^2x^2 \\ \hline 9x^4 + 12ax^3 + 3a^2x^2 - 3acx^2 - 4a^2cx - a^3c \end{array}$$

Zusatz. 1.) $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$

2.) $2n.2m = 4nm$; und $(2n + 1).2m = 4nm + 2m$

3.) $(2n + 1).(2m + 1) = 4nm + 2m + 2n + 1.$

4.) $2n + 1$, oder $2(n + 1) - 1$ ist die $(n + 1)$te ungerade Zahl.

5.) Für *ächte* Brüche ist $\frac{a}{a + d} - \frac{a}{a + b} =$

$$\frac{ac + ab - ac - ad}{(a+d)\,.\,(a+b)} = \frac{ab - ad}{(a+d).(a+b)}$$

6.) Für *unächte* Brüche ist $\frac{a+d}{a} - \frac{a+b}{a} =$

$$\frac{ac + ad - ac - ab}{ac} = \frac{ad - ab}{ac}$$

§. 32.

Aufgabe. 3.) Vieltheilige Gröfsen zu *dividiren.*

Auf. 1.) $(4c^2x^2 - 16cdx - 8cx)$ $\{$ $Q = -cx + 4d + 2$

$: -4cx$ $\{$

$+4c^2x^2$ $\{$

$0 \quad -16cdx - 8cx$

$(-4cx)$

$-16cdx$

$+$

0

$-8cx$

$(-4cx)$

$-8cx$

$+$

0

Auf.

Aufl. 2.) $9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4 \;\{\; Q = 3x^2 + 4ax + a^2$

$(3x^2 - a^2)$

$+ 9x^4 - 3a^2x^2$

$- \quad +$

$0 + 12ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^3x - a^4$

$(3x^2 - a^2)$

$12ax^3 \qquad - 4a^3x$

$- \qquad +$

$0 \quad + 3a^2x^2 \quad 0 \quad - a^4$

$(3x^2 - a^2)$

$+ 3a^2x^2 \qquad - a^4$

$- \qquad +$

0

Zuſatz. 1.) Iſt der *Diviſor* kein Faktor des *Dividendus*, ſo erhält der *Quotient* die *Form eines Bruchs*; oder kann durch eine *Reihe von Brüchen ohne Ende* dargeſtellt werden, nach den Regeln der Diviſion: Z. B.

$\frac{1}{1-x} = 1 \;\{\; Q = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots.$

$(1 - x$

$+ 1 - x$

$- \quad +)$

$+ x$

$$
\begin{array}{l}
+x \\
(1-x) \\
+x-x^2 \\
-\quad+x \\
\hline
\qquad +x^2 \\
\qquad (1-x) \\
+x^2-x^3 \\
-\quad+x^2 \\
\hline
\qquad +x^3
\end{array}
$$

Zuſatz. 2.) Dieſe Reihe läſst ſich leicht ohne weitere Diviſion fortſetzen; denn man ſiehet, daſs der *Quotient* alle *Potenzen von x* nach der Reihe ohne Ende enthalten werde, und zwar ſo: daſs

a) wenn irgend ein *Reſt poſitiv iſt*, und eine *Potenz von x* enthält, deren *Exponent* die *Zahl des Reſtes* iſt, — ſolcher *Reſt* auch dieſe *Potenz x* für das *Glied des Quotienten* gebe, deſſen Zahl *eins* mehr, als die Zahl des Reſtes iſt,

b) der *nächſtfolgende* Reſt von eben der Beſchaffenheit ſey.

3.) Eigentlich iſt alſo:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 \ldots\ldots +x^m+\frac{x^{m+1}}{1-x}.$$

4.) $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3 \ldots\ldots$ Hier ſind eben

eben die *Geſetze der Reſte*, und der *Glieder des Quotienten*, wie im Zuſ. 2. nur daſs hier die *Zeichen in beyden abwechseln*. Der Quotient iſt alſo hier vollſtändig dadurch ausgedrückt:

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots\ldots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x}$$

oder

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots\ldots - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

5.) Man ſetze $x = 1$ ſo findet man

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots + 1 - \frac{1}{2}$$

oder

$$= 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots + 1 - 1 + \frac{1}{2}$$

6.) Hätte der Bruch dieſe Form, $\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$

ſo ergiebt ſich der *Quotient*, wenn man $-\frac{b}{a}$ anſtatt x ſetzt.

7.) Iſt im Zuſ. 6. $a > b$: ſo *nehmen* die folgenden Glieder in dem *erſten* Quotienten *immer ab*, und in dem *zweyten immer zu*; iſt aber $a < b$: ſo *nehmen* ſie in dem *erſten zu*, und in dem *zweyten ab*.

§. 33.

Erklärung. Eine *Reihe*, Series, heifst eine Menge von Gröfsen, Gliedern, oder *Theilen*, deren jede nach einem gewifsen, *allen gemeinſchaftlichen Geſetze* beſtimmt wird. Der Ausdruck, welcher dieſes gemeinſchaftliche Geſetz darſtellt, heifst ein *allgemeines Glied*, Terminus Generalis.

Zuſatz. 1.) Aus dem allgemeinen Gliede läfst ſich die *Reihe ohne Ende*, Series indefinita, ſo weit es verlangt wird, beſtimmen.

2.) Die Glieder der Reihe nehmen entweder zu, oder ab; und geben hierdurch entweder eine *ſteigende Reihe*, adſcendens, oder *fallende*, deſcendens.

3.) Rechnet man alle Glieder einer Reihe, oder nur eine gewifse Menge von Gliedern zuſammen: ſo heifst das, was heraus kömmt, *die Summe* der Reihe, oder der berechneten Glieder. Die *Ergänzung* der Reihe, Supplementum, heifst, was zur Summe der erſten Glieder kommen muſs, um die Summe der ganzen Reihe zu machen.

4.) Bey einer fallenden Reihe wird die Ergänzung deſto kleiner, je mehrere erſte Glieder man ſummirt; oder dem ſämmtlichen Werthe der Reihe immer näher, und näher kömmt. Dieſer Werth heifst die

Grän-

Gränze der Reihe; und die Reihe heifst *nähernd*, convergens. Eine steigende Reihe, als bey welcher das Gegentheil statt findet, heifst *entfernend*; divergens.

5.) Eine Reihe nähert, oder entfernt sich desto *schneller*, je gröfser der Unterschied ihrer Glieder ist.

6.) Nähert sich eine Reihe sehr schnell; so sind wenige ihrer ersten Glieder schon hinreichend, den gesammten Werth bis auf eine Kleinigkeit darzustellen.

8. Die Rechnung mit Decimal- und Sexagesimal-Brüchen.

§. 34.

Erklärung. Ein *Decimalbruch* — zehntheiliger Bruch, heifst, dessen *Nenner* eine *Potenz der Zahl zehn* ist.

Zusatz. 1.) $\frac{1}{10} = \frac{1}{1.10^1} = 1.10^{-1}$; $\frac{1}{100} = \frac{1}{1.10^2} = 1.10^{-2}$;

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{1.10^3} = 1.10^{-3}$;

2.) Unterscheidet man die Stellen der *Einer*, durch ein *Comma*, so kann man die Nenner weglassen, und die Ziffern für die Decimalbrüche den Einern zur Rechten in eben der Ordnung folgen lassen; wie die ganzen

zen Decimalzahlen den Einern zur linken folgen. Sind keine ganze Zahlen vorhanden, so setzt man ein Null vor das Comma.

3.) $5674,763 \cdot 10^2 = 567476,3$ und
$5674,763 : 10^2 = 56,74763$.

4.) $0,763 = \frac{763}{1000}$; und $5,763 = \frac{5763}{1000}$

5.) $38,456 = \frac{38456}{1000} = 38456 \cdot 10^{-3}$

6.) $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75$;

$\frac{73}{8} = \frac{73,000}{8} = 9,125$;

aber $\frac{1}{3} = 0,333\ldots\ldots$ und $\frac{17}{3} = 5,666\ldots\ldots$

Daher läßt sich nicht jeder Bruch, oder Quotient genau in Decimalbrüchen ausdrucken.

§. 35.

Aufgabe. Decimalbrüche zueinander zu *addiren*, oder *voneinander zu subtrahiren*.

Auf-

Auflöſ.	754, 306	$8\frac{1}{4}$ = 5, 0864. d. i. 8, 0000	
	0, 898		5, 0864
Summe	755, 204	*Summe*	13, 0864
Differenz	753, 408	*Differenz*	2, 9136.

2.) *Decimalbrüche* miteinander *zu multipliciren.*

Aufl. 35, 7863
2, 25

17 89315
71 5726
71 5726

80, 519175

Denn $35,7863 = 357863 . 10^{-4}$
$2,25 = 225 . 10^{-2}$

Folglich das Produkt $= 357863 . 225 . 10^{-4} . 10^{-2} =$
$80519175 . 10^{-6} = 80, 519175.$

3.) *Decimalbrüche* miteinander *zu dividiren.*

Aufl. 0, 03264 | 0, 136 — 326, 4 | 13600

(0, 24)	(0, 024)
24	24
−86	−86
24	24
72	72
144	144

144	144
24	24
144	144
0	0

Denn im *erſten* Exempel iſt

$$\frac{3264 \cdot 10^{-1}}{24 \cdot 10^{-2}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{-1} = 136 \cdot 10^{-1} = 0,136.$$

Im *zweyten* Exempel iſt

$$\frac{3264 \cdot 10^{-1}}{24 \cdot 10^{-3}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{+2} = 136 \cdot 10^{+2} = 13600$$

Anmerk. Die Beweiſe für die Multiplication, und Diviſion mit Decimalbrüchen werden auch *allgemein* geführt.

§. 36.

Erklärung. Eine Zahl, die man als ein *Produkt* derſelben in eine *Potenz der Zahl* 60 anſiehet, iſt eine *Sexageſimalzahl*, und insbeſonder ein *Sexageſimalbruch*, wenn der *Exponent* einer ſolchen Potenz *negativ* iſt.

Zuſatz. Von dieſer Art iſt die Eintheilung der *Grade* des *Kreiſes* (ſo wie auch der *Stunden*) in *Minuten*, *Secunden*, *Tertien* u. ſ. f. welches man durch $^{\circ}$ $'$ $''$ $'''$ u. ſ. f. anzeigt. Die *Rechnungsarten* ſind wie die mit benannten

Zah-

Zahlen, wobey man auch, wenn die gefundene Zahl Einheiten einer höhern Klaſſe in ſich faſst, ſolche durch die Diviſion mit der Zahl 60 reduciren muſs.

Anmerk. Ueberhaupt heiſst eine *allgemeine Form*, unter welche jede auch noch ſo verſchiedene Zahlenreihe gebracht werden kann, eine *allgemeine Zahlenreihe*; und dieſe entſteht, indem man eine unbeſtimmte Gröſse x nach der Ordnung, wie die poſitiven und negativen Exponenten von Null an zu beyden Seiten aufeinander folgen, in ihre verſchiedenen Potenzen erhebt, und ſolche mit unbeſtimmten einfachen Gröſsen a, b, c, u. ſ. w. multiplicirt. Z. B.,

$$hx^{+n} \ldots\ldots dx^{+3}, cx^{+2} + bx^{+1}, ax^{0}, bx^{-1}, cx^{-2}, dx^{-3} \ldots\ldots hx^{-n}$$

Giebt man in ſolcher allgemeinen Zahlreihe der *gemeinſchaftlichen Gröſse* x einen *beſtimmten Werth*: ſo entſteht daraus, je nachdem dieſer Werth verſchieden iſt, auch ein *verſchiedenes Zahlenſyſtem*; und ſolcher Werth der gemeinſchaftlichen Gröſse x heiſst alsdenn die *Baſis* dieſes Syſtems.

Der

Der zweyte Abſchnitt.

Von den Potenzen, und Wurzeln der Zahlen.

I. Grundlehren von den Potenzen.

§. 37.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl auf ihre Potenzen zu erheben.

Auſl. $7 = 7^1$; $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$; $7 \cdot 7^2 = 7^3 = 343$;
$7 \cdot 7^3 = 7^4 = 2401$.

Zuſatz. 1.) Umgekehrt iſt $7 = \sqrt{49} : \sqrt[3]{343} = 7 = \sqrt[4]{2401}$.

2.) $3^1 = 3^1$; $a^n = a^n$; $\sqrt{49} = \sqrt{49}$; $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a}$;

3.) $400^3 = 64000000$; oder *allgemein* $(a \cdot 10^n)^m = a^m \cdot 10^{n \cdot m}$.

4.) $(\frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$; oder *allgemein*
$(\frac{a}{b})^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots = \frac{a^n}{b^n}$.

5.) $(\frac{1}{10})^2 = 0,1^2 = (0,1) \cdot (0,1) = 0,01$

$(\frac{1}{10})^3 = 0,1^3 = (0,01) \cdot (0,1) = 0,001$

Ue-

Ueberhaupt das *Quadrat* eines *Decimalbruchs* von der *Ordnung* $= n$ ist von der *Ordnung* $= 2n$;

Sein *Würfel* von der *Ordnung* $= 3n$; u. s. w.

6) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$; allgemein $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

weil $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a^{\frac{n}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}} = \frac{a}{b}$.

§. 38.

Lehrsatz. Jede *Potenz einer ganzen Zahl* ist eine *ganze Zahl*; und jede *Potenz* eines *eigentlichen Bruchs* ist ein *eigentlicher Bruch.* Denn

1.) Ist a eine *ganze* Zahl, so ist offenbar $a^n = a\,a\,a \ldots$ (n) auch eine ganze Zahl.

2.) Ist $\frac{a}{b}$ ein *ächter* Bruch, wo $a < b$, folglich $a^n < b^n$; so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ auch ein ächter Bruch.

3.) Ist $\frac{a}{b}$ ein *unächter* aber *eigentlicher* Bruch, dessen

Zähler und Nenner Produkte aus *ungleichen Primzahlen* sind, so dafs $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot d \cdot e \ldots}{f \cdot g \cdot h \ldots}$ ist: so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c^n \cdot d^n \cdot e^n \ldots}{f^n \cdot g^n \cdot h^n \ldots}$; folglich ein Bruch, wo jeder einfache Faktor im Zähler und Nenner, bey der *zweyten* Potenz *zweymal*, bey der *dritten dreymal*, bey der *nten nmal* vorkömmt, ohne dafs jemals einige Faktoren des Nenners, vielweniger alle, in den Faktoren des Zählers aufgiengen.

Demnach wird $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern, weil $a^n > b^n$, immer ein *unächter*, aber *eigentlicher* Bruch bleiben.

Zusatz. Ist die *Wurzel einer ganzen Zahl* Gröfser, als *eine ganze Zahl* x, aber *kleiner*, als *diese ganze mit Einheit vermehrt* ($x < x + 1$), so ist solche Wurzel weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch.

2.) Dergleichen Wurzeln heifsen *Irrationalgröfsen*, und haben weder die *Einheit*, noch irgend *einen Theil der Einheit* zum Maafse.

3.) ist $\frac{a}{d}$ ein unächter aber eigentlicher

II. Die

II. Die Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 39.

Lehrſatz. 1.) Das *Quadrat* einer *mehrtheiligen Wurzel* enthält das *Quadrat beyder Theile*, und das *doppelte Produkt* aus *beyden Theilen*.

Denn $(A + B)\,(A + B) = A + B$

$\quad\quad\quad

gelte *Wurzel* und noch *Eins* addirt, so hat man das nächstfolgende.

$1^2 = 1 \quad = 1 \quad = 1.$

$2^2 = 1 + 2 + 1 = 1 + 3 = 4.$

$3^2 = 4 + 4 + 1 = 1 + 3 + 5 = 9.$

$4^2 = 9 + 6 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$

$5^2 = 16 + 8 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$= 25.$

$6^2 = 25 + 10 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$+ 11 = 36.$

$7^2 = 36 + 12 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$+ 11 + 13 = 49.$

woraus man sieht, dafs die *Differenzen* der Quadrate um 2 wachsen.

5.) Bedeutet A *Zehner*, und B *Einer*, p die *Ziffer* des Zehners, q die *Ziffer* des Einers; so ist klar, dafs $(A + B)^2 = (p.10 + q.1)^2$ $= p.^2 100 + 2pq.10 + q^2.1$, und folglich

$A^2 = p^2.100.$

$2AB = 2pq.10.$

$B^2 = q^2.1.$

Auf-

Aufgabe. 1.) Aus jeder, höchst *vierziffrigen* Zahl, die *Quadratwurzel zu ziehen.*

Auf. 1.) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{72}$ fällt zwischen 8, und 9, und ist *irrational.*

$\sqrt{90000} = 300$; und $\sqrt{7200}$ fällt zwischen 80, und 90.

$\sqrt{0,0009}$ ist $0,03$; und $\sqrt{0,000072}$ fällt zwischen $0,008$, und $0,009$.

A B

2.) $\sqrt{86,49} = 9\ 3$.

$A^2 = 81$

$2A = 18) 549$

$2AB = 54$

$B^2 = 9$

§. 40.

Lehrsatz. 2.) Das *Quadrat* einer *vieltheiligen* Wurzel besteht aus den *Quadraten aller Theile* der Wurzel, und aus den *doppelten Produkten aller ersten Theile* in *jeden nächstfolgenden*; z. B. der beyden ersten in den dritten; der drey ersten in den vierten, u. s. f. Denn

I.) Iſt die Wurzel *zweytheilig*, ſo iſt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

II.) Iſt ſie *dreytheilig* $p + q + r$; ſo ſetze man $p + q = a$ und $r = b$, ſo iſt

$$a^2 = p^2 + 2pq + q^2 = A$$
$$2ab = 2(p + q) \cdot r$$
$$b^2 = r^2$$

Alſo das *Quadrat* der *dreytheiligen Wurzel*

$$p^2 + 2pq + q^2 + 2 \cdot (p + q) \cdot r + r^2 =$$
$$A + 2 \cdot (p + q) \cdot r + r^2 = B.$$

III.) Hat die Wurzel *vier* Theile $p + q + r + f$; ſo ſetze man $p + q + r = a$; $f = b$; und ihr *Quadrat* iſt

$$B + 2 \cdot (p + q + r) \cdot s + s^2 = C.$$

IV.) Hat ſie *fünf* Theile, daſs nämlich zu den vorigen vieren noch t kömmt, ſo ſetze man die erſten viere $= a$; und $t = b$; ihr *Quadrat* iſt alſo

$$C + 2(p + q + r + s) \cdot t + t^2 = D, \text{ oder}$$
$$p^2 + 2pq + q^2$$
$$+ 2(p + q)r + r^2$$
$$+ 2(p + q + f)s + s^2$$
$$+ 2(p + q + r + s)t + t^2$$

V.) Man ſieht leicht daſs dieſes *ohne Ende* nach folgendem *Geſetze* fortgeht: *wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt, ſo kommen zu dem Quadrate zwey Stücke; ein dop-*

doppeltes Produkt aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat des neuen Theils.

Zusatz. Wenn eine *vieltheilige* Wurzel um *einen* Theil wächst, so *kömmt* zu ihrem *Quadrate* so was *dazu*, wie zu dem *Quadrate* einer *eintheiligen* Wurzel kömmt, wenn diese *zweytheilig* wird.

Aufgabe. 2.) Aus jeder *vielziffrigen* Zahl die *Quadratwurzel zu ziehen.*

a b c d

$\sqrt{41|37|06|24} = 6432$

$a^2 = 36$

$2a = 12) 537$

496

$2A = 128) 4106$

$2AB + B^2 = 3849$

$2A = 1286) = 25724$

$2AB + B^2 = 25724$

Zusatz. 1.) a.) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ &c.

b.) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$ &c.

2.) a) $\sqrt{0,454276} = 0,674$ Denn es ist

$\sqrt{0,}$

$$\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}}$$

$$= \frac{674}{1000} = 0,674.$$

Ferner $\sqrt{0,0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0,12.$

b.) $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280} = \frac{\sqrt{8280}}{\sqrt{10000}} = \frac{90}{100} = 0,9$ —

einem Theile $< \frac{1}{10}$

3.) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{0,333333\ldots\ldots} = 0,577\ldots\ldots$

Anmerkung. Beym Ausziehen der Quadratwurzel kann man sich, zur Erfparung, oder doch Abkürzung der Arbeit der bereits berechneten *Quadrattafeln* bedienen.

§. 41.

Aufgabe. 3.) Aus einem *Polynome* in *Buchstaben*, die *Quadratwurzel* zu ziehen.

Aufl. 1.) $\sqrt{(+25a^2 + 9b^2 + 30ab + 4b^2)} = \pm 5a \pm 3b.$

$a^2 = 25a^2$

$$(2a = \mp 10a) + 30ab + 9b^2$$
$$2a\ b^2 + b^2 + 30ab + 9b^2$$
$$0$$

2.) $\sqrt{(4x^4 + 16b^4 + 16b^2ax + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 8ax^3)} =$

$$\alpha \qquad \beta \qquad \gamma$$

$\sqrt{(4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4} = 2x^2 + 2ax + 4b^2$

$4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2$

$2A = 4x^2 + 4ax) + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$

$+ 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$

0

Aufgabe. 4.) Aus einem *Binom* in *Buchſtaben* $p^2 \mp q$, welches *kein vollkommenes* Quadrat iſt, die Quadratwurzel durch *Näherung* zu finden.

Auf. $\sqrt{p^2 \mp q} = p \mp \frac{q}{2p} - \frac{q^2}{8p^3} \mp \frac{q^3}{16p^5} \ldots = A.$

$\frac{p^2}{2p}) \mp q$

$+ q + \frac{q^2}{4p^2}$

$2p \mp \frac{q}{p}) - \frac{q^2}{4p^2}$

$$-\frac{q^2}{4p^2}-\frac{q^3}{8p^4}+\frac{q^4}{64p^6}$$
$$+\frac{q^3}{8p^4}-\frac{q^4}{64p^6}$$

Zusatz. Ist eine gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat; so läßt sie sich durch $p^2 \pm q$ ausdrücken, und behandeln. So

ist $\sqrt{150} = \sqrt{(12^2+6)} = 12 + \frac{6}{24} - \frac{36}{8.1728} \ldots$

$= 12 + \frac{1}{4} - \frac{1}{384} \ldots = 12 + \frac{95}{384} = 12,247395 \ldots$

Und eben so $\sqrt{1289} = \sqrt{(36^2-7)} = 36 - \frac{7}{12} -$

$\frac{49}{8.46656} \ldots = 35,902644.$

III. Die Cubikzahlen, und Cubikwurzeln.

§. 42.

Lehrsatz. 1.) Der *Würfel* einer *zweytheiligen Wurzel*, enthält den *Würfel beyder Theile*, das *dreyfache Produkt* aus dem *Quadrate des ersten Theils* in den *zweyten*, und das *drey-*

dreyfache Produkt aus dem *ersten Theile* in das *Quadrat des zweyten.*

Denn $A^2 + 2AB + B^2$

$\times \quad A + B$

$A^3 + 2A^2B + AB^2$

$+ A^2B + 2AB^2 + B^3$

Also $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 =$

$A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$

Zusätze. 1.) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

2.) Sind zwey Wurzeln um *Eins* unterschieden, wie n, und $n + 1$; so sind ihre *Würfel* n^3, und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, folglich deren *Unterschied* die *dreyfache Summe* der *vorigen Wurzel*, und *ihrer Quadratzahl*, und überdem noch *um Eins*, $3n^2 + 3n + 1 = 3(n^2 + n) + 1$.

3.) Nach diesem *Gesetze* wachsen die *Würfel aller ganzen Zahlen* auf folgende Art:

$1^3 \quad 1 \quad = \quad 1 \quad = \quad 1$

$2^3 = 1 + 3(1 + 1) + 1 = 1 + 7 = 8$

$3^3 = 8 + 3(2 + 4) + 1 = 8 + 19 = 27$

$4^3 = 27 + 3(3 + 9) + 1 = 27 + 37 = 64$

$5^3 = 64 + 3(4 + 16) + 1 = 64 + 61 = 125$

$6^3 = 125 + 3(5 + 25) + 1 = 125 + 91 = 216$

$7^3 = 216 + 3(6 + 36) + 1 = 216 + 127 = 343$.

$8^3 = 343 + 3(7 + 49) + 1 = 343 + 169 = 512$.

$9^3 = 512 + 3(8 + 64) + 1 = 532 + 217 = 729$.

$10^3 = 729 + 3(9 + 81) + 1 = 729 + 271 = 1000$.

Man ſieht hieraus, daſs die *Differenzen* der Würfel um ein *Produkt* von 6 in die *Zahl* wachſen, welche *angiebt*, die wie*vielte Differenz* es nach der *erſten iſt*.

4. Es ſey A ein Zehner, B ein Einer, und die Ziffer des Zehners $= p$; und die Ziffer des Einers $= q$; ſo hat man $(A + B)^3 =$

$(p \cdot 10 + q \cdot 1)^3 = p^3 \cdot 1000 + 3p^2q \cdot 100 + 3pq^2 \cdot 10 + q^3 \cdot 1$; und folglich:

$$A^3 = p^3 \cdot 1000$$
$$3A^2B = 3p^2q \cdot 100$$
$$3AB^2 = 3pq^2 \cdot 10$$
$$B^3 = q^3 \cdot 1.$$

Aufgabe. 1.) Aus jeder höchſtens *ſechsziffrigen* Zahl die *Cubikwurzel* zu ziehen.

Aufl. 1.) a.) $\sqrt[3]{81} = x$; $\sqrt[3]{343} = 7$; aber $\sqrt[3]{429}$ fällt zwiſchen 7 und 8, und iſt irrational.

b.) $\sqrt[3]{8000000} = 200$, und $\sqrt[3]{343000} = 70$; aber $\sqrt[3]{429000}$ fällt zwiſchen 70, und 80.

c.)

c.) $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$; $\sqrt[3]{0,000343} = 0,07$; aber $\sqrt[3]{0,000429}$ fällt zwischen 0,07, und 0,08,

2.) $\sqrt[3]{157,464} = 54 = ab$

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75)\ 32464$

$3a^2b = 300$

$3ab^2 = 240$

$b^3 = 64$

0

§. 43.

Lehrsatz. 2.) Der *Würfel* einer *vieltheiligen Wurzel* enthält den *Würfel eines jeden Gliedes*; das 3*fache Produkt aus allen ersten Gliedern* in das *Quadrat des jedesmal nächstfolgenden.* Denn

I.) Ist die Wurzel *zweytheilig*, so ist,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

II.) Ist sie *dreytheilig* $p + q + r$; so setze man

$p + q = a$; und $r = b$; so ist

$a^3 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

$3a^2b = 3(p + q)^2r$

$3ab^2 + b^3 = 3(p + q)r^2 + r^3$

Alſo der Würfel der *dreytheiligen* Wurzel

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p+q)^2 r + 3(p+q)r^2 + r^3 =$$
$$A + 3(p+q)r^2 + 3(p+q)r^2 + r^3 = B.$$

III. Hat die Wurzel *vier* Theile $p + q + r + s$; ſo ſetze man $p + q + r = a$; und $s = b$; und ihr Würfel iſt:

$$B + 3(p+q+r)^2 s + 3(p+q+r)s^2 + s^3 = C.$$

IV. Hat die Wurzel *fünf* Theile, daſs nämlich zu den vorigen vieren noch t kömmt; ſo ſetze man die erſten viere $= a$, und $t = b$; ihr Würfel iſt alſo:

$$C + 3(p+q+r+s)^2 t + 3(p+q+r+s)t^2 + t^3 = D;$$

oder:

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$
$$+ 3(p+q)^2 r + 3(p+q)r^2 + r^3$$
$$+ 3(p+q+r)^2 s + 3(p+q+r)s^2 + s^3$$
$$+ 3(p+q+r+s)^2 t + 3(p+q+r+s)t^2 + t^3$$

V. Man ſieht leicht, daſs dieſes nach folgendem *Geſetze*, ohne Ende fortgeht: wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt, ſo kommen zu dem Würfel *drey* Stücke: *ein dreyfaches Produkt aus dem Quadrate aller vorhergehenden Glieder in das neue; ein dreyfaches Produkt aus der Summe aller vorhergehenden Glieder in das Quadrat des neuen; und der Würfel des neuen Gliedes.*

Zuſatz. Wenn eine *vieltheilige* Wurzel um *einen Theil* wächst, ſo kömmt zu ihrem *Würfel* ſo was dazu, wie zu dem *Würfel einer eintheiligen Wurzel* kömmt, wenn dieſe *zweytheilig* wird.

Aufgabe. 2.) Aus jeder *vielziffrigen* Zahl die *Cubikwurzel* zu ziehen.

$$\sqrt[3]{75|955|677|875} = \underset{abcd}{4235}$$

$a^3 = 64$

$3a^2 = 48)\ 11955$

96

48

8

$3A^2 = 5292)\ 1867677$

$3A^2B = 15876$

$3AB^2 = 1134$

$B^3 = 27$

$3A^2 = 536787)\ 26871075$

$3A^2B = 2683935$

$3AB^2 = 31725$

$B^3 = 125$

0

Zuſatz. 1.) a.) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$ &c.

b.) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{3}}$ &c.

2.) a.) $\sqrt[3]{0,216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6$; eben so

$\sqrt[3]{0,001728} = \sqrt[3]{\frac{1728}{1000000}} = \frac{12}{100} = 0,12$ &c

2.) $\sqrt[3]{0,5021} = \sqrt[3]{0,502100} = \sqrt[3]{\frac{502100}{1000000}} = \frac{78}{100}$

$= 0,78\ldots\ldots$ so ist auch $\sqrt[3]{0,5121} = \sqrt[3]{0,512100}$

$= \sqrt[3]{\frac{512100}{1000000}} = \frac{80}{100} = 0,8\ldots\ldots$

3.) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0,666666\ldots} = 0,87\ldots$

4.) $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}} = \sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Eben so ist

$\sqrt[3]{64,421875} = 4,75$; ferner $\sqrt[3]{10,3954} =$

$\sqrt[3]{10,395400} = \frac{202}{100} = 2,02$.

Anmerk. Beym Ausziehen der Cubikwurzel kann man die *Cubiktafeln* zu Hülfe nehmen. §. 44

§. 44.

Aufgabe. 3.) Aus einem *Polynom in Buchſtaben* die *Cubikwurzel* zu ziehen.

Aufl. 1.) $\sqrt[3]{27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3} = \overset{a}{3a} - \overset{b}{2b}$;

$a^3 = 27a^3$

$(3a^2 = 27a^2) - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$

$3a^2b = -54a^2b$

$3ab^2 - b^3 = +36ab^2 - 8b^3$

o

2.) $\sqrt[3]{(M + N)} = \overset{a}{2a} - \overset{b}{3b} + \overset{c}{c}$

$M = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

$(a + b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

o

$(3A^2 = 12a^2 - 36ab + 27b^2$

$N = +12a^2c - 36abc + 27b^2c + 6ac^2 - 9bc^2 + c^3$

$12A^2c = +12a^2c - 36abc + 27b^2c$

$3Ac^2 + c^3 = +6ac^2 - 9bc^2 + c^3$

o

Aufgabe. 4.) aus einem *Binom in Buchſtaben* $p^3 \mp q$, welches *kein vollkommener* Cubus iſt, die *Cubikwurzel* durch Näherung zu finden.

$$a \quad b \quad c$$

Aufl. $\sqrt[3]{p^3 + q} = p + \frac{q}{3p^2} - \frac{q^2}{9p^5} + \frac{5q^3}{81p^8} - \ldots = A$

$a^3 = p^3$

$3a^2) + q$

$3a^2 b) = + q$

$3ab^2 + b^3 = + \frac{q^2}{3p^3} + \frac{q^3}{27p^6}$

$(3(a+b)^2) = \frac{q^2}{3p^3} + \frac{q^3}{27p^6}$

$3(a+b)^2 c = + \frac{q^2}{3p^2} + \frac{2q^3}{9p^5} + \frac{q^4}{27p^8}$

$3(a+b)c^2 + c^3 = + \frac{q^3}{27p^8} + \frac{q^5}{81p^{11}} + \frac{q^6}{729p^{14}}$

$(3(a+b+c)^2) = + \frac{5q^3}{27p^6} + \frac{q^5}{81p^{11}} + \frac{q^6}{729p^{14}}$

Zusatz. Ist eine gegebene Zahl kein vollkommener Würfel; so läßt sie sich durch $p^3 \mp q$ ausdrücken, und behandeln.

IV. Die Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 45.

Lehrsatz. 1.) Jede *Potenz* der *Zahl* a ist *größer*, als ihr *Exponent*.

Beweis. Gesetzt es sey $n \triangleright 1$, und $2^n \triangleright n$, so folgt aus dem ersten, dass $2n \triangleright n + 1$; und aus dem zweyten, dass $2 \cdot 2^n \triangleright 2n$; d. i. $2^{n+1} \triangleright 2n$; folglich noch vielmehr $2^{n+1} \triangleright n + 1$. Ist also der Satz von der nten Potenz der Zahl 2 wahr; so ist er es auch von der $n+1$ten, oder der zunächstfolgenden Potenz. Nun ist offenbar $2^1 \triangleright 1$ und $2^2 \triangleright 2$, also der Satz von der ersten und zweyten Potenz der Zahl 2 wahr, daher ist er es auch von der 3ten, und daher auch von der *vierten*, und so weiter von *allen folgenden* Potenzen der Zahl 2, und ist also *allgemein*.

Lehrsatz. 2.) Wird eine Grösse A *halbirt*, und ihre *Hälfte* wieder *halbirt*, und immer so fort: so lässt sich durch eine gewisse Anzahl fortgesetzter Halbirungen eine Grösse finden, die kleiner ist, als jede beliebig angenommene Grösse C derselben Art, quavis data minor. Denn

weil A und C *von einerley Art* sind; so giebt es eine gewisse Zahl m, wodurch $A \prec m\,C$ wird; dass folglich auch $\frac{A}{2^m} \prec \frac{m\,C}{2^m}$ ist. Nun ist $m \prec 2^m$; also $\frac{m}{2^m}$ ein ächter Bruch, und daher $\frac{m}{2^m} \cdot C \prec C$; folglich ist noch vielmehr $\frac{A}{2^m} \prec C$.

Zu-

Zusatz. 1.) Von dem Bruche $\frac{1}{2}$ läfst sich eine bestimmte Potenz finden, die kleiner, als jeder beliebig angegebene Bruch ist.

2.) Dieses gilt noch vielmehr von einem Bruche, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; und folglich auch von einem ächten Bruche, welcher die Einheit zum Zähler hat.

§. 46.

Erklärung. Eine Gröfse *nähert sich ohne Ende* einem gewifsen Werthe, (ihrer *Gränze*) wenn ihr Unterschied von diesem Werthe kleiner, als jede angegebene Gröfse werden kann.

Zusatz. 1.) Man kann eine solche Gröfse ihrer *Gränze* gleich setzen.

2.) Die Reihen (§. 31.) nähern sich ohne Ende dem Werthe der Brüche $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{a+b}$, als ihren Gränzen; man kann sie also diesem Werthe gleich setzen.

3.) Eben dieses gilt von den *Irrationalzahlen*, (§. 36. Zus.) die sich zwar nie *völlig genau*, aber doch so genau angeben lassen, dafs das noch fehlende *kleiner wird*, als *jede gegebene Zahl*, quovis dato minus.

4.) In der *Ausübung* kann man zu jedem Gebrauche bey

ei-

nem Paare dieſer Gränzen ſtehen bleiben, und die eine ſtatt der andern, oder ſtatt der dazwiſchen liegenden Gröſse, ohne merklichen Fehler ſeszen. Für die *Theorie* aber gilt dies nur in ſo fern, als ſich dieſe Gränzen ohne Ende einander noch immer weiter nähern können, daſs der Unterſchied ſich nicht angeben läſst.

5.) Die Sätze, die von *Rationalzahlen* bewieſen worden, müſsen auch von *Irrationalzahlen* gelten, und ſind alſo *allgemein*.

§. 47.

Erklärung. 2.) Ein Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, welcher anzeigt, daſs aus einer *beliebigen Gröſse* a, die *Wurzel* eines *beliebigen Grades* n gezogen werden ſolle, heiſst eine *Wurzelgröſse*.

Aufgabe. 1.) Wurzelgröſsen *gleichnamig* zu machen, oder unter *einerley Benennung* zu bringen.

Auſl. Statt $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{b^3}$ kommt $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{3}{4}}$; oder $a^{\frac{8}{12}}$ und $b^{\frac{9}{12}}$ das iſt $\sqrt[12]{a^8}$ und $\sqrt[12]{b^9}$; wodurch die Wurzeln einerley Exponenten haben.

Zuſatz. 1.) Daher entſteht die Regel: *multipliciere den Exponenten jeder Gröſse mit dem Wurzelexponenten der an-*

ändern; so giebt das Produkt beyder Wurzelexponenten den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

So giebt $\sqrt[r]{a^m}$ und $\sqrt[s]{a^n}$ die die gleichnamigen Wurzeln $\sqrt[rs]{a^{ms}}$ und $\sqrt[rs]{a^{nr}}$.

2.) $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3.2]{a^{4.2}}$, und $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4.2]{a^{2.2}} = \sqrt{a}$.

Aufgabe. 2.) Wurzelgrößen miteinander zu *multipliciren*, oder zu *dividiren*.

Auf. 1.) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, und $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$. Desgleichen ist

$a^{\frac{1}{n}} . c^{\frac{1}{n}} = (ac)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ac}$; also $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ac}$.

und $a^{\frac{1}{n}} : c^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}$; also $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}$.

2.) $\sqrt[p]{a} . \sqrt[q]{c} = \sqrt[pq]{a^q} \sqrt[pq]{c^p} = \sqrt[pq]{a^q . c^p}$. und

$\sqrt[p]{a} : \sqrt[q]{c} = \sqrt[pq]{a^q} : \sqrt[pq]{c^p} = \sqrt[pq]{\frac{a^q}{c^p}}$.

Aufgabe. 3.) Eine Wurzelgröße in eine *Potenz zu erheben*, oder aus derselben *eine Wurzelgröße zu ziehen.*

Auf. 1.) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}$; und $(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt{a})^2$.

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1}$; oder allgemein $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2.) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$; daher auch $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}$

$= \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$.

Zusatz. 1.) $\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}$.

2.) $a\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^{2n}}$; und

$$\frac{\sqrt[n]{a^2}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{a^2}{a^n}}$$

Aufgabe. 4.) Wurzelgrößen *zu addiren*, oder *zu subtrahiren.*

Aufl. 1.) $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$

$(3 + 2)\sqrt{2} = \sqrt{50}$. Auch ist $\sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} =$

$\sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$. Auch ist $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}}$

$= \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{27 \cdot 3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3} =$

$\left(4 - \frac{4}{9}\right)\sqrt{3}$.

2.) $\sqrt{12 + \sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{12 + \sqrt{6}})^2} = \sqrt{(18 + \sqrt{288}}$.

Anmerk. Die Rechnungen mit *zusammengesetzten* Wurzelgrößen, gründen sich gänzlich auf die Regeln für einfache Wurzelgrößen.

§. 48.

Lehrſatz. 3.) a.) Iſt das Quadrat einer *Irrationalgröſse*, *rational*, ſo ſind alle *gerade* Potenzen derſelben auch *rational*, alle *ungerade aber irrational*.

Bew. Wenn a rational, und $\sqrt{a}$ irrational iſt; ſo iſt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$, folglich rational. Eben ſo iſt $(a^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^n$ folglich auch rational. Hingegen $(a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^n \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^n \cdot \sqrt{a}$, folglich *irrational*

b.) Von der *bejahten Gröſse* ſind *alle Potenzen bejaht*, von jeder *verneinten Gröſse* aber, alle *gerade* Potenzen *bejaht*, alle *ungerade verneint*. Denn

$(+a)^2 = +a^2$; ferner $(+a)^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$

$(+a)^{2n+1} = +a^{2n} \cdot +a = +a^{2n+1}$; aber

$(-a)^{2n+1} = +a^{2n} \cdot -a = -a^{2n+1}$.

Zuſatz. 1.) $\sqrt[2n]{9} = +3$; $\sqrt[3]{8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

2.) $\sqrt{-a}$ iſt ein Ausdruck einer *unmöglichen*, oder *eingebildeten* Gröſse

3.) $\sqrt[2n]{-a} = -a^{\frac{1}{2n}} = (-a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\sqrt[n]{-a})}$

4.) $(\sqrt{-a})^2 = -(a^{\frac{1}{2}})^2 = -p$. Oder

$(\sqrt{-a}) \cdot (\sqrt{-a}) = \sqrt{a^2} = -p$;

c.) Von einer *eingebildeten* Zahl $\sqrt{-a}$, deren *Qradrat* $-a$ *möglich* ist; sind alle *gerade Potenzen reell*; alle *ungerade* aber *eingebildet*. Denn

$(\sqrt{-a})^{2n} = (-a)^n$ also reell; und

$(\sqrt{-a})^{2n+1} = (\sqrt{-a})^{2n} \cdot \sqrt{-a}$, also eingebildet.

Der dritte Abschnitt.

Von der Vergleichung der Zahlen.

I. Die Arten, Zahlen zu vergleichen.

§. 49.

Erklärung. 1.) Vergleicht man zwey Zahlen in Absicht auf die Grösse, welche die eine gegen die andere hat; so betrachtet man ihr *Verhältniß*, ratio; welches entwe-

der *arithmetiſch*, arithmetica; oder *geometriſch*, geometrica, genannt wird, je nachdem die Vergleichung mittelſt der *Subtraction*, oder der *Diviſion* geſchieht.

2.) Die Zahlen, die man mit einander vergleicht, heiſsen die *Glieder*, termini des Verhältniſſes; wobey es willkührlich, welches man zum *Vordergliede*, antecedens, oder *Hintergliede*, conſequens, machen will.

3.) Die *Differenz*, welche das *Vorderglied* vom *Hintergliede* ſubtrahirt giebt, heiſst der *Name*, nomen, des *arithmetiſchen* Verhältniſſes; der *Quotient* aber, welchen das *Vorderglied* in das *Hinterglied* dividirt giebt, heiſst der *Name des geometriſchen Verhältniſſes.*

Zuſatz. Iſt das Vorderglied > Hinterglied: ſo iſt der *Name* des *arithmetiſchen* Verhältniſſes *negativ*; und der *geometriſchen*, ein *ächter Bruch.*

4.) Sind *mehrere Verhältniſſe* der Art, daſs das Hinterglied des einen, das Vorderglied des andern iſt; ſo heiſsen dergleichen Verhältniſſe *zuſammenhängende*, oder *ſtetige*, continuæ, alle andere aber *abgeſonderte*, diſcretæ.

§. 50.

Erklärung. 1.) *Gleiche Verhältniſſe* ſind, die *gleiche Namen* haben; und die *Gleichheit zweyer Verhältniſſe* heiſst eine *Proporti-*

sion, die wie die Verhältniſſe, entweder *arithmetiſch*, oder *geometriſch*, desgleichen entweder *ſtetig*, oder *abgeſondert* iſt.

2.) Zu einer Proportion gehören 4; und wenn ſie ſtetig iſt, 3 Glieder. Das letzte, und erſte Glied heiſsen die *äuſſerſten*, extremi, das zweyte, und dritte aber die *mittlern*, medii. Bey der ſtetigen Proportion ſind beyde gleich, und machen das *mittlere* Glied aus. *Gleichnamige*, oder *ähnlich liegende*, homologi, heiſsen die Vorderglieder, oder die Hinterglieder.

3.) Eine *Menge Zahlen*, die alle in *gleichen ſtetigen Verhältniſſen*, die folglich einen gemeinſchaftlichen Namen haben, fortgehen, machen eine *Progreſſion*, oder *Reihe*, welche, wie die Verhältniſſe, entweder *arithmetiſch*, oder *geometriſch* iſt.

II. Die arithmetiſchen Proportionen.

§. 51.

Grundſatz. Das *Hinterglied* eines jeden arithmetiſchen Verhältniſſes *entſtehet*, wenn man den *Namen*, er mag bejahend, oder verneinend ſeyn, zum *Vorderglede addirt*.

Zuſatz. 1.) a — (a ± d); und b = (b ± g) Sind *allgemeine Formen* zweyer Verhältniſſe;

2.)

2.) $a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$ ist die *allgemeine Form* der *arithmetischen Proportion*; und $a - (a \mp d) = (a \mp d) - (a \mp 2d)$ oder $\div a . a \pm d , a \mp 2d$ ist die allgemeine Form der *stetigen Proportion*.

§. 52.

Lehrsatz. Die *Summe der äussern Glieder* ist bey einer *abgesonderten* Proportion, der *Summe der mittlern Glieder*; bey einer *stetigen* Proportion aber, dem *doppelten mittlern Gliede* gleich.

Denn von der *abgesonderten* Proportion $a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$ ist offenbar $a \pm b \mp d = a \mp d \pm b$; und von der *stetigen* Proportion $a - (a \mp d) = (a \mp d) - (a \mp 2d)$ ist offenbar $a \pm a \mp 2d = (a \mp d) \pm (a \mp d) = 2(a \mp d)$.

Zusatz. 1.) Ist $a - (a \pm d) = b - x$; mithin

$$a \pm x = (a \pm d) \pm b$$
$$- a = - a$$

$$x = b \pm d \text{ also}$$

$$a - (a \pm d) = b - (b \pm d,)$$

2.) $\div \pm a . x . a \pm 2d$ mithin

$$2x = 2a \pm 2d$$

$$x = \frac{2a + 2d}{2}$$

$$\div a \,.\, \frac{2a + 2d}{2} \,.\, a + 2d$$

Zwiſchen 54 und 68 iſt das *mittlere Glied*, oder das *arithmetiſche Mittel* $= \frac{54 + 68}{2} = 61$, folglich

$$\div 54 \,.\, 61 \,.\, 68.$$

3.) Auf ähnliche Art, macht man im gemeinen Leben ſowohl, als in Wiſſenſchaften den *Durchſchnitt*, oder die *Mittelzahl*, wenn man die *Summe* mehrerer Gröſsen mit ihrer *Anzahl* dividirt. So iſt von 3, 5, 7, 9, der Durchſchnitt, oder die Mittelzahl $\frac{3 + 5 + 7 + 9}{4}$

$$= \frac{24}{4} = 6$$

III. Die arithmetiſchen Progreſſionen.

§. 53.

Grundſatz. Jedes *folgende Glied* einer arithmetiſchen Progreſſion *entſtehet*, wenn man *zu dem nächſt vorhergehenden* Gliede den

gemeinſchaftlichen Verhältniſsnamen, er mag bejahend, oder verneinend ſeyn, *addirt.*

Zuſatz. 1.) $\div \overset{1}{a} . \overset{2}{a} \dotplus d . \overset{3}{a} \dotplus 2d . \overset{4}{a} \dotplus 3d \ldots . \overset{n}{a} \dotplus (n-1)d$ iſt die *allgemeine Form* der arithmetiſchen Progreſſion. Die Zahl, welche anzeigt, daſs wievielte Glied der Reihe ein jedes Glied ſey, heiſse der *Zeiger*, *index*. Auch iſt $a \dotplus (n-1)d$ das *allgemeine Glied der Reihe.*

2.) Wenn *jedes folgende* Glied der Reihe R irgend ein *vorhergehendes* M, und die *Zahl* der von M bis R gehenden Glieder r heiſst; ſo iſt $R = M \dotplus (r-1)d$ und $M = R - (r-1)d$.

3.) $\frac{R - M}{r - 1} = d$,

4.) $\frac{B - A}{n \dotplus 1} = d$. Eine Formel zum *Interpoliren.*

5.) $\div A . a . b . c . B . d . e . f . C . g . h . k . D$ u. ſ. w.

§. 54.

Lehrſatz. In jeder arithmetiſchen Reihe iſt die *Summe der beyden äuſſerſten Glieder* der *Summe jeder zweyer von den äuſſerſten gleichweit*

weit abſtehender Glieder, und bey *ungerader* Anzahl der Glieder, dem *mittelſten doppelt genommen* gleich. Denn

bedeuten a, und u, die äuſſerſten Glieder: ſo iſt das rte Glied vom Anfange $= a + (r-1)\,d$, und das rte Glied vom Ende $= u - (r-1)\,d$; folglich ihre Summe $= a + (r-1)\,d + u - (r-1)\,d = a + u$. Bedeutet bey *ungerader* Anzahl der Glieder, das rte Glied das mittelſte: ſo iſt ſolches zugleich das rte vom Anfange, und vom Ende, folglich $= \frac{a+u}{2}$

Zuſatz. 1.) $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$ wobey $u = a + (n-1)\,d$.

2 Aus a, n, d, findet man u, und hieraus S.

Aufg. a.) Die Summe der erſten 1000 natürlichen Zahlen zu finden.

b.) Die Summe der erſten n ungeraden Zahlen zu finden.

3.) $S = (2a + nd - d)\frac{n}{2}$; wodurch man S unmittelbar aus a, n, d, findet.

4.) Iſt $d = a$; ſo iſt $u = an$, und $S = \frac{n.(n+1)a}{2}$; inwelchem Falle man u, und S, aus a, und n, findet.

5.)

5.) $n = \frac{u - a + d}{d}$, und $S = \frac{a + u}{2} \cdot \frac{u - a + d}{d}$;

wodurch aus a, u, und d, man n, und hieraus S, findet.

Anmerk. Auf diese Art lassen sich noch mehrere Aufgaben für arithmetische Reihen auflösen. Denn überhaupt, wenn von den *fünf Dingen* a, u, d, n, S, *drey* gegeben sind; so lassen sich daraus die *beyden übrigen* finden.

IV. Die geometrischen Proportionen.

§. 55.

Grundsatz. Das *Hinterglied* jedes *geometrischen Verhältnisses* entstehet, wenn man das *Vorderglied* mit dem *Namen*, er mag eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder eine Irrationalzahl seyn, *multiplicirt*.

Zusatz. 1.) a : ae, und b : bm ist die *allgemeine* Form zweyer *Verhältnisse*. Ist nun e $\lessgtr$ m, so ist a : ae $\gtrless$ b : bm; und umgekehrt b : bm $\lessgtr$ a : ae.

2.) a : ae = b : be ist die *allgemeine Form* der *geometrischen Proportion*; und wenn b = ae, die Form der *stetigen* a : ae = ae : ae^2, oder $\div$ a . ae . ae^2.

3.)

3.) Ist $a : b = m : n$, und $c : d = m : n$; so ist $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$ und $\frac{d}{c} = \frac{n}{m}$ folglich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ also $a : b = c : d$.

4.) Ist $a : b = c : d$ so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also auch $b : a = d : c$.

5.) Für die *Multiplication* ist $FQ = P$, d. i. $1 : F = Q : P$; und für die *Division* $\frac{P}{F} = Q$, das ist $P : F = Q : 1$.

§. 56.

Erklärung. 1.) *Verhältniſſe der Gleichheit*, ratio æqualitatis heiſst, wenn das Vorderglied dem Hintergliede gleich ist, der *Ungleichheit* aber, ratio majoris, vel minoris inæqualitatis, wenn das Vorderglied gröſser, oder kleiner, als das Hinterglied ist.

2.) Kehrt man die Glieder eines Verhältniſſes um; so heiſst das neue Verhältniſs, das *umgekehrte*, oder *verkehrte*, ratio reciproca, des vorigen, das alsdann das *gerade*, directa, heiſst.

3.) Ein Verhältniſs heiſst rational, oder *irrational*, je nachdem

dem ihr Name rational, oder irrational ist. Letzterer kann der Wahrheit immer näher, und näher gebracht werden.

§. 57.

Lehrsatz. 1.) Werden zwey Zahlen A, B, mit einerley m, multiplicirt, oder dividirt: so verhalten sich die Produkte, oder die Quotienten, wie diese Zahlen. Denn

da $\frac{B}{A} = \frac{mB}{mA} = \frac{B:m}{A:m}$; so ist $A:B = mA:mB = \frac{A}{m}:\frac{B}{m}$.

Zusatz. 1.) Weil $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ so ist $\frac{mB}{A} = \frac{mD}{C}$; und

$$\frac{B}{mA} = \frac{D}{mC}.$$

2.) $\frac{a}{c}:\frac{b}{c} = a:b$; und $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd} = ad:bc$.

3.) $\frac{a}{m}:\frac{a}{n} = \frac{1}{m}:\frac{1}{n} = \frac{n}{mn}:\frac{m}{mn} = n:m$.

4.)

4.) Von dem *geraden* Verhältniſſe a : b, iſt $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ das *umgekehrte.*

5.) Jedes *Rationalverhältniſs* läſst ſich in *ganzen*, und zwar in den *kleinſten* Zahlen angeben.

6.) $\sqrt{28} : \sqrt{63} = 2\sqrt{7} : 3\sqrt{7} = 2 : 3$. Alſo können *Verhältniſſe rational* ſeyn, deren *Glieder Irrationalzahlen* ſind.

7.) *Irrationalverhältniſſe* laſſen ſich *Rationalverhältniſſen*, als ihren *Gränzen* ohne Ende *nähern.*

§. 58.

Lehrſatz. 2.) Das *Produkt der äuſſern Glieder* iſt bey einer *abgeſonderten* Proportion, dem *Produkte der mittlern Glieder*; bey einer *ſtetigen* Proportion aber, dem *Quadrate des mittlern Gliedes* gleich. Denn bey der *abgeſonderten* Proportion A : B = C : D, iſt $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$; folglich

$\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC}$; alſo BC = AD. und iſt B = C; alſo die Proportion *ſtetig*: ſo iſt $B^2 = AD$.

Zuſatz. 1.) In einer *ſtetigen* Proportion iſt $B = \sqrt{(AD)}$

2.)

2.) Iſt in ∴ A . B . D; A = 1 : ſo iſt D = B^2 und $\sqrt{D} = B$.

3.) Sind in der Proportion A : B = C : D; alle Glieder *einerley Art*; ſo iſt auch A : C = B : D;

4.) Iſt AD = BC; ſo iſt A : B = C : D.

§. 59

Lehrſatz. 3,) Sind *vier Zahlen* proportionirt, A : B = C : D; ſo iſt

1.) A ∓ C : B ∓ D = A : B = C : D; denn
da AD = BC; ſo iſt
AD ∓ CD = BC ∓ CD; d. i.
(A ∓ C) D = (B ∓ D) C; folglich
A ∓ C : B ∓ D = C : D.

2.) A ∓ B : C ∓ D = A : C = B : D. Denn
da AD = BC; ſo iſt
AD ∓ BD = BC ∓ BD; d. i.
(A ∓ B) D = (C ∓ D) B. folglich
A ∓ B : C ∓ D = B : D = A : C.

Zuſatz. 1.) A ∓ B : B = C ∓ D : D. oder
A ∓ B : A = C ∓ D : C; und durch *Umkehrung*
A : A ∓ B = C : C ∓ D.

2.)

2.) Auch bey *mehr*, als *zwey gleichen* Verhältniſſen A : B = C : D = E : F = G : H; iſt (A + C + E + G) : B + D + F + H = A : B = C : D u. ſ. f.

§. 60.

Lehrſatz. 4.) Werden die *Glieder zweyer Proportionen*, als a : b = c : d, und e : f = g : h; *nach der Ordnung multiplicirt miteinander*: ſo ſind die *Produkte* in der Ordnung auch *proportionirt*. d. i.

ae : bf = cg : dh. Denn

wenn $a : b = c : d$; ſo iſt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und

wenn $e : f = g : h$; ſo iſt $\frac{f}{e} = \frac{h}{g}$; und hieraus

$\frac{b}{a} \cdot \frac{f}{e} = \frac{d}{c} \cdot \frac{h}{g}$ folglich ae : bf = cg : dh.

Anmerk. Auch gilt der Satz von der *Diviſion*.

Zuſatz. 1.) Der Satz gilt auch von *mehrern* Proportionen.

2) Iſt a : b = c : d; ſo iſt auch $a^m : b^m = c^m : d^m$; und

$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

3.) Aus beyden Proportionen

$a : b = c : d$; und

$b : f = d : g$. folgt (*ordinatim*, *& ex æquo*) die dritte $a : f = c : g$. und aus

$a : b = c : d$

$b : f = g : c$ folgt *perturbate*, *& ex æquo*

$a : f = g : d$.

4.) Iſt $a : b = a : b$, $a : b = b : c$, $a : b = c : d$ } ſo iſt $a^2 : b^2 = a : c$, $a^3 : b^3 = a : d$; u. ſ. w.

folglich auch $a : b = \sqrt{a} : \sqrt{c} = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d}$; u. ſ. w.

V. Die ſogenannten Rechnungsregeln.

§. 61.

Aufgabe. 1.) *Zu drey* Zahlen a, b, c, die *vierte* Proportionalzahl x zu finden; daſs nämlich $a : b = c : x$.

Auſl. Da $ax = bc$: ſo iſt $x = \frac{bc}{a}$. Wäre $b = c$, ſo wäre $x = \frac{b^2}{a}$.

Anmerk. 1.) Die Vorſchrift, wie man zu drey gegebenen Gliedern einer geometriſchen Proportion, das vierte finden kann, heiſst die *Regel detri*, *de tribus numeris.*

ris. Man theilt ſie in die *gerade*, und *verkehrte ein.* Die *gerade*, oder *regula detri recta*, entſteht, wenn eine Gröſse mit der andern in *gleichem Verhältniſſe* wächſt, oder abnimmt. Die *verkehrte*, oder *regula detri inverſa*, entſtehet, wenn eine Gröſse in dem Verhältniſſe *abnimmt*, in welchem die andere *wächst*; und *umgekehrt.*

Anmerk. 2.) Zur *geraden* Regel detri gehört unter andern:

1.) die *Berechnung der Waaren*, und *Preiſe.*

2.) Die *Zinsrechnung.*

3.) Die *Verrichtung der Arbeiter*, die *Zeit*, die ſie zu einem Werke brauchen, und ihr *Taglohn.*

4.) Die *Reductionsrechnung.*

Zur *verkehrten Regel detri* gehört unter andern:

1.) Die Berechnung der *Arbeiter*, und *der Zeit*, die zu einem Werke nöthig ſind.

2.) Die Berechnung, in wie viel *Zeit* ein *gegebenes Capital* eben ſo viel Intereſſen bringt, als ein anderes in einer gegebenen Zeit; imgleichen wie *groſs das erſtere Capital* ſeyn muſs, wenn die *Zeit für daſſelbe* gegeben iſt.

3.) Die Berechnung der *Länge der Zeuge* von *verſchiedener Breite*, die zu einerley Abſicht gebraucht werden.

§. 62

Aufgabe. 2.) Ein *ganzes* A in *ungleiche* Theile; deren *Verhältniſſe*, p, q, r, u. ſ. w. gegeben ſind, *einzutheilen.*

Aufl. Man ſetze die geſuchten Theile ſeyen x, y, z; ſo daſs x + y + z = A; ſo iſt

p : q = x : y und

q : r = y : z; folglich

p : r = x : z. Demnach iſt

p : x = q : y = r : z; folglich

p + q + r : A = p : x = q : y = r : z,

was auch p, q, r für Zahlen bedeuten mögen.

Anmerk. Man nennt dieſs die *Theilrechnung*, *Repartitionsrechnung*; wovon eine beſondere Anwendung iſt:

1.) Die *Geſellſchaftsrechnung*, wo mehrere Perſonen ungleiche Capitalien zu einem Handel hergeben.

2.) Die *Vermiſchungsrechnung*, regula alligationis, wo man eine Sache aus verſchiedenen Beſtandtheilen zuſammenſetzen ſoll. So, daſs dieſe in gegebenen Verhältniſſen gegen einander ſtehen.

§. 63.

Aufgabe. 3.) Es bedeuten V, v, Urſachen; T, t, Zeiten; E, e, Wirkungen; man ſoll das Verhältniſs der Wirkungen finden.

Aufg. Ist $T = t$; so ist $V : v = E : e$; und
Ist $V = v$, so ist $V : t = E : e$; folglich
ist $Vt : vt = E : e$.

Wäre nun $E = e$; so wäre
$VT = vt$, folglich
$V : v = t : T$.

Auch ist $V : v = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$

Anmerk. Diese Aufgabe kömmt häufig vor, auch wo nicht selbst Ursachen, und Wirkungen vorhanden sind, aber wohl Dinge, die sich nach eben diesen Grundsätzen verhalten; und heisst die *Regel Quinque*, die *Regel Septem* u. s. w. überhaupt aber die *zusammengesetzte Regel de tri.*

Anmerk. 2.) Auf eben den Gründen beruhet die sogenannte *Kettenregel*, bey Vergleichungen von Münzen, Gewichten, u. s. w. wofür diese Form diene:

$m : n = A : B$.
$o : p = B : C$
$q : r = C : D$;
folglich $moq : npr = A : D$.

Anmerk. 3.) Auch gehört hieher die *zusammengesetzte Zinsrechnung*, wenn die jährlichen Zinsen mit zum Capital geschlagen, also Zinsen von Zinsen gegeben werden,

den, wofür die §. 58. Zuſ. 4. gegebene Form diene.

VI. Die geometriſchen Progreſſionen.

§. 64.

Grundſatz. Jedes folgende Glied einer geometriſchen Progreſſion entſtehet, wenn man das nächſtvorhergehende Glied mit dem Verhältniſsnamen, wie er auch beſchaffen ſey, multiplicirt.

Zuſatz. 1.) $\div a \,.\, ae \,.\, ae^{2} \,.\, \ldots\ldots \,.\, ae^{n-2} \,.\, ae^{n-1}$ iſt die *allgemeine Form* der geometriſchen Progreſſion. Die überſchriebenen Zahlen ſind die *Zeiger*, und der letzte Ausdruck das *allgemeine Glied.*

2.) $R = M\, e^{r-s}$; und $M = \frac{R}{e^{r-s}}$ wenn R jedes der folgenden Glieder, M eines der vorhergehenden Glieder, und r die Zahl der Glieder von M bis R bedeutet.

3.) $a : ae = ae^{n-2} : ae^{n-1} = a : ae^{2} = ae^{n-3} : ae^{n-2}$.

4.) $a : ae^{2} = (a)^{2} : (ae)^{2} = a : ae^{3} = (a)^{3} : (ae)^{3}$

§. 65.

Lehrſatz. 1.) Die *Reihe der Unterſchiede* einer geometriſchen Progreſſion iſt auch eine *geometriſche Progreſſion*, die mit jener ei-

einerley *Verhältnifsnamen* hat. Denn, die *allgemeine* Form der geometrifchen Progreffion ift:

$$a \,.\, ae \,.\, ae^2 \,.\, ae^3 \,.\, ae^4 \,.\, \ldots\ldots \,.\, ae^{n-1}.$$

Ihr *Unterfchied* ift:

$$ae - a \,.\, ae^2 - e \,.\, ae^3 - ae^2 \,.\, \ldots\ldots \,.\, ae^{n-1} - ae^{n-2}$$

oder $(e-1)a \,.\, e(e-1)a \,.\, e^2(e-1)a \,.\, \ldots\, e^{n-2}(e-1)a$

alfo wieder eine geometrifche Progreffion von eben dem Verhältnifsnamen e, wie in der Hauptreihe.

Zufatz. 1.) Man kann die *zweyte*, *dritte*, *vierte*, und alle *folgende* Reihen der Ueterfchiede eben fo finden, da allemal eine ähnliche geometrifche Progreffion heraus kömmt.

2.) Die *erften Glieder der Hauptreihe*, und der *beyden erften Differenzreihen* machen eine *zufammenhangende Proportion* $a \,.\, (e-1)a \,.\, (e-1)^2 a$, wo der Verhältnifsname $(e-1)$ ift.

3.) Wenn die erften Glieder, der *Hauptreihe*, und der *Reihen der Unterfchiede*, nach der Ordnung, $p; q; r; s; t$; heifsen, fo ift $p : q = q : r$; und weil man nun die erfte Reihe der Unterfchiede als eine Hauptreihe anfehen kann; $q : r = r : s$; und nun die zweyte Differenzreihe, als eine Hauptreihe an-

angesehen, r : s = s : t; u. s. w. Also machen die ersten Glieder eine geometrische Progression aus, deren Verhältnissmasse $e = 1$ ist.

§. 66.

Lehrsatz. 2.) In jeder geometrischen Reihe ist das *Produkt der äussersten Glieder*, dem *Produkte jeder zweyer davon gleichentfernten* Glieder; und wenn die Zahl der Glieder *ungerade* ist dem *Quadrate des mittelsten Gliedes* gleich.

Denn

1.) nach §. 62. Zus. 3. machen zwey, von den äussersten gleichweit entfernte Glieder, mit diesen eine geometrische Proportion; da dann der Satz aus §. 56. Lehrs. erhellet. Steht das mittelste Glied von den äussersten gleich weit ab; so macht es mit ihnen eine stetige Proportion, und der Satz erhellet aus §. 56. Zus. 1. oder

2.) nach §. 62. Zus. 3. ist das r te Glied vom Anfange $a \cdot e^{r-1}$, und das r te Glied vom Ende $\frac{u}{e^{r-1}}$; folglich ihr Produkt $= (a \cdot e^{r-1}) \cdot (\frac{u}{e^{r-1}}) = au$. Ist

das

das rte Glied das mittelſte; ſo iſt ſolches zugleich das rte vom Anfange, und Ende; folglich $= \sqrt{au}$.

Lehrſatz. 3.) In jeder geometriſchen Reihe verhält ſich das *erſte Glied zum zweyten*, wie die *Summe aller Glieder weniger dem letzten*, zur *Summe aller Glieder, weniger dem erſten.*

Denn *alle Glieder* in einer geometriſchen Reihe ſind, auſſer dem letzten, *Vorderglieder*; ihre Summe iſt $S - u$; und alle, auſſer dem erſten, ſind *Hinterglieder*; ihre Summe iſt $S - a$; folglich

$$a : ae = S - u : S - a.$$

§. 67.

Lehrſatz. 4.) In jeder geometriſchen Reihe iſt $S = \frac{ue - a}{e - 1} = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1}$. Denn

1.) $a : ae = S - u : S - a$; alſo auch

$$ae - a : a = (S - a) - (S - u) : S - u = u - a : S - u;$$

folglich iſt $S - u = \frac{(u - a)a}{ae - a}$

und eins mehr als $\frac{u - a}{e - 1}$; folglich

$$S = \frac{u-a}{e-1} + u = \frac{u-a+ue-u}{e-1} = \frac{ue-a}{e-1}$$

Nun ist $u = ae^{n-1}$ und daher $ue = ae^n$, folglich

$$S = \frac{ae^n-a}{e-1} = \frac{(e^n-1)a}{e-1}.$$

a.) Auch ist $S = a + ae + ae^2 \ldots + ae^{n-1}$.

also $eS = ae + ae^2 + ae^3 \ldots + ae^n$

Nun $eS - S = (e-1)S = ae^n - a$; folglich

$$S = \frac{ae^n-a}{e-1} = \frac{ue-a}{e-1}$$

Zusatz. 1.) Für die *fallende* Reihe ist e ein *ächter Bruch*, folglich Zähler und Nenner verneinend, also der Quotient doch bejahend, und bleibt folglich ungeändert, wenn man beyde auch bejahend macht, und hier setzt

$$S = \frac{a-ue}{1-e} = \frac{a-ae^n}{1-e} = \frac{(1-e^n)a}{1-e}$$

2.) Heißt das zweyte Glied der Reihe b; so ist $e = \frac{b}{a}$

und eins läßt sich für das andere setzen.

3.) Aus den Formeln (§. 67. Lehrs. und Zus. 1.) lassen sich u, und S finden, wenn a, n, und e, oder b, gegeben sind.

4.)

4.) Ueberhaupt kann man auch hier von den *fünf* Gröſsen, a, e, u, n, und S, wenn *drey* derſelben gegeben ſind, die übrigen finden; und durch die verſchiedenen Verſetzungen dieſer Gröſsen, die Anzahl der Aufgaben vermehren; davon aber mehrere in die *Algebra* gehören.

VII. Die Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

§. 68.

Erklärung. Wenn man zwey, oder mehrere ſtetige Verhältniſse hat, wie a : b ; b : c ; u. ſ. w. ſo ſagt man : das Verhältniſs des Vordergliedes des erſten zum Hintergliede des letzten, a : c ſey aus den einzelnen Verhältniſſen *zuſammengeſetzt*, oder in dieſelben *zerlegt*.

Zuſatz. 1.) Die *Bezeichnung* der zuſammengeſetzten Verhältniſſe iſt: $a : c \left\{ \begin{matrix} a : b \\ b : c \end{matrix} \right\}$; oder $a : c = (a : b) + (b : c)$

2.) Man muſs *Verhältniſſe* von *Quotienten* ſorgfältig unterſcheiden. Der Quotient iſt der *Name* des Verhältniſſes, nicht das *Verhältniſs ſelbſt*.

3.) Wäre $a : b = m : n$

$b : c = q : r$; ſo iſt auch

$$a : c = (m : n) + (q : r)$$
$$= (a : b) + (b : c)$$

§. 69.

Lehrſatz. 1.) Das Verhältniſs *zweyer Produkte*, iſt aus den Verhältniſſen *der Faktoren* zuſammengeſetzt, oder

$$ac : bd = (a : b) + (c : d).$$

Denn

man ſetze $c : d = b : e$; ſo iſt hier $e = \frac{bd}{c}$

und man hat:

$$a : b = a : b$$
$$c : d = b : e$$

folglich $ac : bd = a : e$; nun iſt aber

$$a : e = (a : b) + (b : e) = (a : b) + (c : d)$$

alſo auch $ac : bd = (a : b) + (c : d)$

Zuſatz. 1.) Auf dieſe Art laſſen ſich *mehrere* Verhältniſſe *zuſammen ſetzen.*

Wenn $a : b = a : b$
$c : d = b : q$
$e : f = q : r$
$g : h = r : s$

ſo

So ist $a\,c\,e\,g : b\,d\,f\,h = a : s = (a:b) + (b:q) + (q:r) + (r:s)$
$= (a:b) + (c:d) + (e:f) + (g:h)$

Die *Kettenregel* ist eine solche Zusammensetzung der Verhältnisse.

2.) $ac : bc = (a:b) + (c:c)$
$= a : b$; also ist das *Verhältniss der Gleichheit* $c : c$; oder $1 : 1$; bey der *Zusammensetzung der Verhältnisse*, als *Null* anzusehen.

3.) $(f:h) + (g:k) + (k:g) = fgk : hkg$
$= f : h$

und von $+ (g:k)$ ist $+ (k:g)$ so viel als $- (g:k)$

$$= \frac{1}{g} : \frac{1}{k}.$$

§. 70.

Erklärung. 1.) Sind die *einzelnen Verhältnisse* $a:b$; $c:d$; $e:f$. u. s. w. alle einander *gleich*: so ist jedes derselben ein *aliquoter* Theil des daraus zusammengesetzten; und dieses das *Vielfache* eines solchen Theils. Die Zahlen, welche solchen Theil, oder solches Vielfache, d. i. die Theilung, oder Vervielfältigung eines Verhältnisses anzeigen, sollen die *Exponenten des Verhältnisses* (eigentlich ihrer Theilung, und Vervielfältigung) heissen.

a.) Man nennt insbesondere ein Verhältniss ein *verzweyfachtes*, *verdreyfachtes* u. s. f. ratio duplicata, triplicata &c. wenn es aus zweyen, dreyen, oder mehrern gleichen Verhältnissen besteht.

Zusatz. 1.) Wäre $a : b = m : n$

$b : c = m : n$

$c : d = m : n$

so ist $a : c$ doppelt so gross als $m : n$. In dieser Rücksicht ist alsdenn das Verhältniss $m : n$ halb so gross, als $a : c$ ratio subduplicata; das Verhältniss $a : d$ ist aber dreymal so gross, als $m : n$; und $m : n$ $\frac{1}{3}$ des Verhältnisses $a : d$, ratio subtriplicata.

Zusatz. 1.) Wenn $a : b = b : c$; so ist $a : c = (a : b) + (a : b) = 2 . (a : b)$ das *verdoppelte*, duplicata, von $a : c$. Man setze $a = 1$; so ist $c = b^2$ oder das Verhältniss $1 : c$, der *Einheit zum Quadrate*, ist doppelt so gross, als das Verhältniss $1 : b$, der *Einheit zur Wurzel*, und das Verhältniss der *Einheit zur Wurzel*, halb so gross, als das Verhältniss der *Einheit zum Quadrate*.

2.) Wenn $a : b = b : c = c : d$; so ist $a : d = 3 (a : b)$ und $a : b = \frac{1}{3} (a : d)$. Also wenn $a = 1$, das Verhältniss 1 zum *Würfel*, dreymal so gross, tripli-

plicata, als 1 *zur Wurzel*; und dieſes ein *drittheil von jenem*, ſubtriplicata.

3.) Man macht überhaupt von einem Verhältniſse ein *Vielfaches*, oder einen *Theil* eines *gegebenen Exponenten*, wenn man von den *Gliedern des Verhältniſſes*, die *Potenz*, oder die *Wurzel dieſes Exponenten* macht.

§. 71.

Lehrſatz. 2.) Eine geometriſche Reihe, die ſich mit *Eins* anfängt, enthält lauter *Potenzen des zweyten Gliedes* a, deren *Exponenten* die natürlichen Zahlen ſind, und daher eine *arithmetiſche Reihe* machen. Denn

wenn ein Glied der Reihe a^m heiſst, m eine ganze Zahl iſt, und das nächſte Glied x, ſo iſt

$$1 : a = a^m : x; \text{ alſo } x = a^{m+1};$$

Wenn alſo ein Glied der Reihe eine Potenz iſt, ſo iſt auch das nächſtfolgende eine, die einen Grad höher iſt. Aber das zweyte Glied a iſt eine Potenz, nämlich a^1; alſo ſind es die übrigen alle; und man erhält die Reihe $= 1, a^1 . a^2 . a^3 . a^4 \ldots . a^n$.

Zuſatz. 1.) Von 1, bis a^n ſind n Verhältniſſe, jedes ſo groſs, als 1 : a; oder das Verhältniſs $1 : a^n$ beſteht aus n

fol-

solchen Verhältnissen; oder es ist $1 : a^n =$ $n . (1 : a)$; und $\frac{1}{n}(1 : a^n) = 1 : a$. Die *Exponenten der Potenzen* bedeuten zugleich und eigentlich das *Vielfache eines, und desselben Grundverhältnisses.*

2.) Da $1 : a^3 = (1 : a) + (1 : a) + (1 : a) = 3 (1 : a)$ und $1 : a^2 = (1 : a) + (1 : a) = 2 (1 : a$; so ist $(1 : a^3) + (1 : a^2) = 1 : a^5$. *Allgemein* $(1 : a^n) + (1 : a^m) = (1 : a^{n+m})$

3.) Schreibt man die Reihe $= 1 . a . b . c . d . . . . . q$, und ist $q = a^n$ so ist $1 : a = \frac{1}{n}(1 : q)$; $1 : b = \frac{2}{n}(1 : q)$; $1 : c = \frac{3}{n}(1 : q)$ u. s. w. endlich $1 : q = \frac{n}{n}(1 : q) = 1 : q$.

4.) $1 : q = 1^n : a^n$. Nun ist $1^n = 1$ folglich auch $q = a^n$; und also $\sqrt[n]{q} = a$.

5.) Die n . 3 . gegebene Reihe kann auch ausgedrückt werden. $1 . q^{\frac{1}{n}} . q^{\frac{2}{n}} . q^{\frac{3}{n}} . . . . q^{\frac{n}{n}}$.

6.) Also $\sqrt[m]{R^n} = R^{\frac{n}{m}}$; oder $\frac{1}{m}(1 : R^n) = 1 : R^{\frac{n}{m}}$. Dieses

ſes heiſst auch $\frac{1}{m} \cdot n\,(1 : R) = \frac{n}{m}\,(1 : R) = 1 : R^{\frac{n}{m}}$. Dies iſt der §. 25. Zuſ. 3. angedeutete Begriff von *Potenzen mit gebrochenen Exponenten.*

7.) Es ſey $1 : M = 1 : R^{\frac{n}{m}}$; und $1 : N = 1 : R^{\frac{p}{q}}$; ſo iſt $(1 : M) + (1 : N) = 1 : MN = 1 : R^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$.

8.) Setzt man die im Lehrſatz ausgedrückte Reihe rückwärts fort, $a^{\frac{1}{n}} \ldots a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{1}} \cdot 1, a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \ldots a^n$, ſo iſt $1 : a^{\frac{1}{n}} = a^n : 1 = -(1 : a^n)$. Man verſteht daraus, was $1 : a^{-m}$ oder $1 : a^{-\frac{m}{n}}$ bedeutet, wodurch der Begriff von *Potenzen mit negativen Exponenten* gegeben iſt.

9.) Es ſey $1 : M = 1 : R^{\frac{n}{m}}$; und $1 : N = 1 : R^{-\frac{p}{q}}$; ſo iſt:

$$(1 : M) + (1 : N) = 1 : MN = (1 : R^{\frac{n}{m}}) + (1 : R^{-\frac{p}{q}})$$
$$= 1 : R^{\frac{n}{m}} \cdot R^{-\frac{p}{q}} = 1 : R^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}.$$

§. 72.

Lehrſatz. 3.) Jedes Verhältniſs $1 : a$. kann ohne Ende immerfort ſowohl *getheilt*, als *vervielfältiget werden.* Denn

das Verhältniſs 1 : a läſst ſich *halbiren*; und dadurch erhält man $\dot{:}\,1 \,.\, a^{\frac{1}{2}} \,.\, a^1$. Die beyden Verhältniſſe $1 : a^{\frac{1}{2}}$; und $a^{\frac{1}{2}} : a^1$ laſſen ſich wieder *halbiren*; dadurch erhält man die vier gleichen Verhältniſſe $\dot{:}\,1 \,.\, a^{\frac{1}{4}} \,.\, a^{\frac{2}{4}} \,.\, a^{\frac{3}{4}} \,.\, a^1$. Und jedes dieſer Verhältniſſe läſst ſich wieder halbiren; und dieſe *Halbirungen können ohne Ende* wiederholt werden.

Eben ſo kann man auch das Verhältniſs ohne Ende *vervielfältigen*. $\dot{:}\,1 \,.\, a \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,.\, a^4 \,.\,.\,.\,.$

Zuſatz. 1.) Setzt man $1 : a^{\frac{1}{2}}$ mit $1 : a^{\frac{1}{2}}$ zuſammen; ſo erhält man $1 : a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 : a^{\frac{2}{2}}$ die Hälfte von $a^2 : a^3$, oder die mittlere zwiſchen a^2 und a^3 u. ſ. w.

2.) Kehrt man alle dieſe Verhältniſſe um; ſo hat man unmittelbar auch die Theilung, und Vervielfältigung der umgekehrten Verhältniſſe.

3.) Eine Zahl, die *zwiſchen zwey Zahlen* P, S, fällt, muſs nothwendig *einer* von den *mittlern Proportionalzahlen* gleich ſeyn, die ſich zwiſchen denſelben Zahlen P, S, ſetzen laſſen.

4.) Setzt man alſo $A : B = 1 : \frac{B}{A} = 1 : R$; ſo kann

1 :

1 : R entweder durch 1 : a^n; oder durch 1 : $a^{\frac{p}{q}}$ ausgedrückt werden.

VIII. Die Logarithmen.

§. 73.

Erklärung. 1.) Eine ganze Folge *aller möglichen Verhältniſſe*, die man als aus einem, und demſelben *Grundverhältniſſe* hergeleitet, betrachtet, heiſst ein *Syſtem von Verhältniſſen.*

Zuſatz. Es iſt eine *unzählige Menge* von Verhältniſsſyſtemen möglich.

2.) Hat man ein *gewiſſes Syſtem* von Verhältniſſen angenommen, auch für das *Grundverhältniſs* eine *beliebige Gröſse* L, und für alle übrige Verhältniſſe andere Gröſsen feſtgeſetzt, die aus L eben ſo, wie ihre zugehörigen Verhältniſſe aus dem Grundverhältniſse erwachſen; ſo nennt man dieſe Gröſsen, die ſich wie die Exponenten der Verhältniſſe verhalten, die *Maaſse*, oder *Logarithmen* der ihnen zugehörigen Verhältniſſe; und die ganze Folge dieſer, einem *gewiſſen Syſteme von Verhältniſſen* zugehörigen Logarithmen, ein *Syſtem von Logarithmen*, oder ein *logarithmiſches Syſtem.*

$\frac{q}{p}$ *Zuſatz.* 1.) Gleiche Verhältniſſe, müſſen gleiche Logarithmen haben. Soll man daher *gleiche Verhältniſſe* 1 : a, und 1 : a *zuſammen ſetzen*, oder ein Verhältniſs 1 : a in *gleiche Theile* 1 : $\sqrt[2]{a^1}$, und $\sqrt[2]{a^1}$: a^1 theilen; ſo muſs man, um den Logarithmus des *zuſammen geſetzten* Verhältniſſes 1 : a^2 zu erhalten *zwey gleiche* Logarithmen 1 L und 1 L *zuſammen ſetzen*; und um den Logarithmus eines *jeden Theils* des getheilten Verhältniſſes zu erhalten, den Logarithmus 1 L in *gleiche Logarithmen* $\frac{1}{2}$ L, und $\frac{1}{2}$ L theilen.

2.) Setzt man daher L = 1; ſo ſind die *Exponenten der Verhältniſſe* zugleich ihre *Logarithmen*.

3.) In jedem Syſteme iſt der Logarithmus des *Verhältniſſes der Gleichheit*, oder der Logarithmus der *Einheit* = 0.

4.) In jedem Syſteme hat das *gerade* Verhältniſs mit ſeinem *umgekehrten* einerley Logarithmus, nur daſs die *Zeichen entgegengeſetzt* ſind.

5.) Der Logarithmus des *zuſammen geſetzten* Verhältniſſes, iſt die *Summe der einzelnen* Logarithmen, ſie mögen *poſitiv*, oder *negativ* ſeyn.

§. 74.

Lehrſatz. 1.) Man findet den Logarithmus eines *Products*, wenn man die *Logarithmen der Faktoren* addirt; und den Logarithmus eines *Quotienten*, wenn man vom *Logarithmus des Dividendus*, den *Logarithmus des Diviſors* ſubtrahirt. Denn

1.) Log. pq iſt eigentlich Log. (1 : pq)

Nun iſt $1 : pq = 1 : p + 1 : q$; folglich

Log. $(1 : pq) =$ Log. $(1 : p) + 1 : q) =$ Log. $1 : p$ + log. $1 : q$; oder log. $pq =$ log. $p +$ log. q.

2.) Log. $\frac{n}{m}$ iſt eigentlich Log. $(1 : \frac{n}{m}) =$ log. $(m : n)$

Nun iſt $m : n = 1 : n + m : 1 = 1 : n + 1 : m$. folglich iſt log. $(1 : \frac{n}{m}) =$ log. $1 : n -$ log. $1 : m$; oder

log. $\frac{n}{m} =$ log. $n -$ log. m.

2.) Man findet den Logarithmus einer *Potenz*, wenn man den *Logarithmus der Wurzel*, mit dem *Exponenten der Potenz* multiplicirt; und den *Logarithmus einer Wurzel*, wenn man den *Logarithmus der Potenz* mit dem *Exponenten der Wurzel* dividirt. Denn

1.) Log. a^3 ist eigentlich log. $(1 : a^3)$ Nun ist
$1 : a^3 = (1 : a) + (1 : a) + (1 : a)$. Folglich
Log. $(1 : a^3) =$ log. $1 : a +$ log. $1 : a +$ log $1 : a$
$= 3$ Log. $1 : a$ oder log. $a^3 = 3$ Log. a.

2.) Folglich auch $\frac{\text{log. } a^3}{3} =$ Log. a.

§. 75.

Erklärung. 3.) Setzt man das *Grundverhältniss* 1 : 10; und ihren *Logarithmus* 1; so hat man das *gemeine System*, oder das *Briggisch - Vlacqische*; wo N die Reihe der Decimalzahlen, und L die Reihe der Logarithmen, welche hier die Exponenten der Verhältnisse selbst sind, bedeutet:

N.) 1. 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000.

L.) 0 1, 2. 3. 4. 5.

Zusatz. Die Logarithmen der decadischen Zahlen findet man, wenn man durch das *Interpoliren* einer geometrischen Progression, deren Grundverhältniss 1 : 10 ist, die Logarithmen für die *Primzahlen* berechnet, und aus diesen die Logarithmen der *zusammen gesetzten Zahlen* bestimmt.

Anmerk. Nach dieser mühsamen Methode sind wirklich die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 berechnet; aber von diesen nur diejenigen in die *Tafeln* ge-

gebracht, welche Verhältnissen, die durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, zugehören, und der Kürze wegen, Logarithmen solcher Zahlen heissen.

4.) Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1, und 10 sind > 0, und < 1; deser zwischen 10, und 100 sind > 1, und < 2. u. s. w. Da man sie nun durch Decimalzahlen anzeigt; so besteht jeder aus einer ganzen Zahl, und aus einem Decimalbruche, wovon jener die *Kennzisser*, oder *Charakteristik*; dieser aber die *Mantissa* heisst.

Anmerk. Die *kleinern Tafeln* gehen bis zu der Zahl 10000, und liefern nur 7 Stellen der *Mantissa*. Die *grössern* gehen theils bis zu 100000, und drüber; theils geben sie 10, und mehrere Stellen der *Mantissa* an.

§. 76.

Aufgabe. 1.) Den jeder *gegebenen Zahl* zugehörigen Logarithmus *aus den Tafeln* zu finden.

Auflösung. I.) Wenn die gegebene Zahl höchstens 4 *Ziffer* enthält.

Log. 4537 = 3, 6567688.

Log. 4,537 = 0, 6567688.

Log. 0, 004537 = 0, 6567688 — 3 u. s. w.

II.)

III.) Wenn die gegebene Zahl *über vier Ziffern* enthält.

Es seye die Zahl 4738425 gegeben; so ist

log. 4739 — log. 4738 = ,6756807 — ,6755951 = 916. Nun setze man:

1:0,425 = 916 : x; so ist x = 389

welches zum log. 4738 addirt, giebt

,67756340. Demnach ist:

log. 4738425 = 6,6775634o.

log. 47,38425 = 1,6775634o.

log. 0,4738425 = 0,6775634o — 1; u. s. w.

III.) Wenn der gegebenen Zahl ein *Bruch* angehängt ist.

$$\log. 234\frac{3}{4} = \log. 234,75 = 2,3706056;$$

$$\text{oder } \log. 234\frac{3}{4} = \log. \frac{939}{4} = \log. 939 - \log. 4, \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe. 2.) Die jedem *gegebenen Logarithmus* zugehörige Zahl, aus den *Tafeln* zu finden.

Auf. I.) Wenn der gegebene Logarithmus *positiv* ist, und

1.) er sich *genau* in den Tafeln unter der *Charakteristik* 3 findet.

3,8741918 = log. 7485. Und

8,

1, 8741918 = log. 74, 85. Und
6, 8741918 = log. 7485000 u. ſ. w.
Eben ſo iſt 0.8741918 — 5 = log. 0,00007485.

2.) Wenn er ſich *nicht genau* in den Tafeln unter der Charakteriſtik 3 findet.

Es ſey der gegebene Logarithmus*, 5639462. Der *zunächſt kleinere* Logarithmus der Zahl 3663 von dem *gegebenen* ſubtrahirt, giebt, ohne auf die Charakteriſtik zu ſehen, die *erſte* Differenz 1093; und von dem *zunächſt gröſsern* log. 3664 ſubtrahirt, die *zweyte Differenz* 1186.

Setzt man nun 1186 : 1 = 1093 : x, ſo iſt x = 0, 922, welches der Zahl 3663 beygefügt, die geſuchte Zahl 3663922 giebt, wenn man den Rang ihrer höchſten Ziffer nach der Charakteriſtik des gegebenen Logarithmus beſtimmt. So iſt 4, 5639462 = log. 36639, 22 und 0, 5639462 — 4 = log. 0, 0003663922 u. ſ. f.

II.) Wenn der gegebene Logarithmus *negativ* iſt.

1.) — 3, 6253124 = log. $\frac{1}{4220}$; und

$$-4,2533380 = \log.\frac{1}{17920}; \text{ u. f. w.}$$

2.) Eben so auch $-3,6253124 = +4-3,6253124-4 =$

$(+4,0000000-3,6253124)+4 = 0,3746876-4 =$

$$\log.0,0002369661 = \log.\frac{1}{4220}; \text{ u. f. w.}$$

II.

Die Algebra.

I. Von den Gleichungen überhaupt.

§. 77.

Erklärung. 1.) Eine *Gleichung*, æquatio, ist ein doppelter Ausdruck einerley Gröfse. Die beyden Ausdrücke heifsen die *Seiten*, membra, und ihre durch die Zeichen + und − verbundenen Theile, die *Glieder*, termini, der Gleichung.

2.) Die *Algebra* lehret, den Werth der unbekannten Gröfsen, aus gegebenen Bedingungen, *mittelst Gleichungen*, herzuleiten.

Anmerk. 1.) Hiebey kommen drey Verrichtungen vor:

1.) die *Formation* der Gleichung;

2.) die *Reduction* der Gleichung;

3.) die *Solution* der Gleichung.

Anmerk. 2.) Die *Formation* der Gleichungen kann durch keine allgemeine Regeln gelehrt werden. Die *Algebra* beschränkt daher ihre Anweisung blos auf die *Reduction*, und *Solution* der Gleichungen ein.

§. 78.

Grundsatz. Wenn man *zu beyden Seiten* einer Gleichung *einerley* addirt, wie auch davon subtrahirt; oder *beyde Seiten* mit einerley multiplicirt, wie auch dividirt; oder *beyde Seiten* zu einerley Potenz erhebt, wie auch daraus *einerley* Wurzel ziehet: bleibt noch eine Gleichung.

Zusatz. 1.) *Jedes Glied* der Gleichung läßt sich, wenn man *sein Zeichen verändert*, versetzen.

2.) Die *Zeichen aller Glieder* lassen sich in die *entgegengesetzten verwandeln.*

3.) *Jede Gleichung* läßt sich auf *Null* bringen.

4.) Die *Brüche* werden weggeschaft, wenn man die *ganze Gleichung* mit den *Nennern* der Brüche *multiplicirt.* So kann man auch die *unbekannte Größe*, als *Divisor* wegbringen.

II. Von den einfachen Gleichungen.

§. 79.

Erklärung. Eine *einfache* Gleichung, oder *vom erſten Grade*, heiſst, worinn die *unbekannte* Gröſse, nachdem ſie kein Diviſor mehr iſt, die *erſte Potenz* nicht überſteigt.

Aufgabe. 1.) Eine *einfache* Gleichung mit *einer einzigen unbekannten* Gröſse aufzulöſen.

Aufl. Es ſey gegeben: $ab + \frac{c}{g} + x = ax + \frac{m}{n}$.

1.) $abgn + cn + xgn = axgn + mg$.

2.) $xgn - axgn = mg - abgn - cn$

3.) $(gn - agn)x = mg - abgn - cn$; und

$$x = \frac{mg - abgn - cn}{gn - agn}$$

Exempel. 1. Ein Bothe A, der täglich 5 Meilen macht, iſt ſchon 10 Tage weg, da ihm ein anderer B. der täglich 7 Meilen macht, nachgeſchickt wird; man frägt, wann dieſer jenen einholen wird?

Exempel. 2.) Es ſoll aus gutem Weine, die Maaſs zu 1 fl. 12 kr. und ſchlechterm zu 45 kr. ein gemiſchter Wein zu 54 kr. werden, man frägt *wie viel* von *jeder Sorte* zur Miſchung kommen muſs? *Alligationsregel.*

Zu-

Zusatz. 1.) Drückt man die gegebenen Grösen *allgemein* durch *Buchstaben* aus, so erhält man eine *allgemeine Formel*, welche für alle Fragen *ähnlicher Art* dient.

Exempel. 1.) *Für* 1. *Ex.* A macht täglich a Meilen, und ist c Tage voraus; B bewegt sich geschwinder, und macht täglich b Meilen. Holt nun dieser jenen in x Tagen ein; so wird $x = \frac{ac}{b-a}$; d. i. man findet x, wenn man ac, d. i. den Weg, den A voraus hat, mit b — a, d. i. mit der Differenz der beyden Geschwindigkeiten dividirt.

Exempel. 2.) *Für* 2. *Ex.* Der Werth der Einheit des Bessern sey a, des geringern b, des gemischten c, der Theil des Geringern x, so wird $x = \frac{a-c}{a-b}$, d. i. man findet x, wenn man die Differenz des hohen und mittlern Werths, mit der Differenz des hohen und geringern dividirt.

Exempel. 3.) Eine Zahl x finden, die mit a multiplicirt um c zu wenig, mit b aber multiplicirt um d zu viel giebt. Auf. $x = \frac{c+d}{b-a}$

Anmerk. 1.) Bezahle ich jedem Arbeiter 6 Rthlr: so habe ich 5 Rthlr übrig; bezahle ich jeden mit 7 Rthlr: so habe ich 3 Rthlr zu wenig. *Wie viele Arbeiter* sind dieses, und *wie groß* ist meine *Baarschaft*?

Anmerk. 2.) Eine Sache soll für eine gewisse Summe ausgespielt werden, kostet nun 1 Loos 5 fl. so kommen 42 fl. zu wenig; kostet es 6 fl. so kommen 58 fl. zu viel. *Wie viel* waren es *Loose*, und *wie groß* die *Summe*?

Zusatz. 2.) Wenn die *eine unbekannte* Größe zugleich die *andere bestimmt*, so kann man diese durch jene, und durch bekannte Größen ausdrücken; und also durch *eine* Gleichung *mehrere unbekannte Größen* finden.

Exempel. 1.) Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe S, und Differenz D, gegeben ist.

— — 2.) Man soll drey Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paares davon gegeben ist; nämlich a die Summe der 1ten und 2ten Zahl; b der 1ten und 3ten; c der 2ten und 3ten.

— — 3.) Eine Zahl a, soll in zwey Theile dergestalt zerlegt werden, daß wenn die 1te mit m, die 2te mit n multiplicirt wird, beyde Produkte einander gleich sind.

Anwend. Zwey Spieler haben 200 Rthlr zu ungleichen Theilen zusammengelegt, doch dafs sie den Gewinn halbiren wollen; und es findet sich, dafs der 1te 6mal, der andere 10mal so viel erhalten, als sein Beytrag gewesen ist. Wie grofs war dieser Beytrag, und wie grofs der Gewinn? —

— — 4.) Zu 2 silbernen Bechern ist ein Deckel. Der erste Becher wiegt 12 Loth, und mit dem Deckel zweymal so viel als der 2te Becher; dieser aber mit dem Deckel 3mal so viel, als der erste. Wie viel wiegt der Deckel, und der 1te Becher? —

— — 5.) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: dein jetziges Alter ist $\frac{1}{3}$ des Meinigen; vor 6 Jahren aber war es $\frac{1}{4}$. Wie alt ist jetzt der Vater, und wie alt der Sohn? —

Zusatz. 3.) Zuweilen mufs man die Frage durch einzelne Gleichungen führen, und das letzte Resultat, oder die Summe aller Resultate in Betracht ziehen.

Exempel. 1.) Ein Kaufmann braucht für sein Hauswesen jährlich 100 Louisdor. Diese nimmt er von seinem Capital, dessen Rest er jedesmal um $\frac{1}{10}$ vermehrt. Nach drey Jahren findet er sein anfängliches Capital gerade verdoppelt; wie grofs war dieses? —

— — 2.) Ein Rittergut ist so verpachtet, dafs nach 6 Jahren zugleich mit den Zinsen 12000 Rthlr bezahlt

zahlt werden. Im 3ten, und 5ten Jahre war Misswachs, wofür nach gerichtlicher Besichtigung das erstemal $\frac{1}{2}$, und das 2te mal $\frac{2}{3}$ von der Pacht erlassen wird. Wie gros war die Pacht, und wie viel geht von der Summe ab? —

— — 3.) Ein Vermögen ward unter die Söhne so vertheilt: der 1te nimmt 100 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des übrigen; der 2te 200 und $\frac{1}{10}$ des übrigen; der dritte 300 und $\frac{1}{10}$ des übrigen, u. s. w. Da sich dann findet, dass jeder gleichviel bekommen hat. Wie gros war das Vermögen, wie viel Söhne, wie viel bekam jeder?

§. 80.

Aufgabe. 2.) Eine Aufgabe mit *zwey unbekannten* Grössen, x, y, für welche *zwey einfache Gleichungen* $x + y = a$ und $fx + dy = b$ vorhanden sind, aufzulösen.

Auss. 1.) $x = a - y$; $x = \frac{b - dy}{f}$; also $a - y = \frac{b - dy}{f}$

2.) $fa - fy = b - dy$; folglich $(d - f)y = b - fa$,

und $y = \frac{b - fa}{d - f}$.

3.) Setzt man diesen Werth statt y in eine der beyden ge-

ersten Gleichungen z. B. $x + y = a$, so hat man

$$x + \frac{b-fa}{d-f} = a, \text{ folglich } x = a - \left(\frac{b-fa}{d-f}\right) = \frac{da-b}{d-f}$$

Exempel. 1.) Es sollen 30 Rthlr bezahlt werden. Dies kann A, wenn ihm B $\frac{1}{5}$ seines Geldes zu Hülfe giebt; B aber, wenn ihm A $\frac{1}{4}$ seines Geldes giebt. Man frägt: wie grofs war die Baarschaft eines jeden?

Exempel. 2.) Aus 2 Röhren A, B, läuft Wasser in ein Gefäfs. Das 1te mal läuft A, a, B, b Stunden, man findet c Maafs im Gefäfse. Das 2te mal läuft A, α, B, β Stunden, und man findet v Maafs im Gefäfse. Wie viel giebt jede Röhre stündlich?

Man soll 2 Zahlen x, y finden deren Summe S, und deren Differenz D gegeben ist.

Aufgabe. 3.) Eine Aufgabe mit *drey unbekannten Gröfsen*, x, y, z, für welche man *drey einfache Gleichungen* A, B, C, hat, aufzulösen.

Aufl. Es sey A) $x + y = a$, B) $x + z = b$. C) $y + z = c$.

1.) Aus A und B, ist $x = a - y$; und $x = b - z$.

2.) Man erhält dadurch D) $a - y = b - z$.

3.) Aus C und D ist $y = c - z$; und $y = a - b + z$.

4.) Man erhält dadurch E) $c - z = a + b + z$.

5.) Aus E findet man $2z = c - a - b$, folglich $z = \frac{c-a-b}{2}$

6) Diesen Werth anstatt z in C gesetzt giebt

$$y = c - \frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a-b}{2}; \text{ in B aber}$$

$$x = b - \frac{c-a+b}{2} = \frac{b-c+a}{2}$$

Anmerk. 1.) Wäre in C auch x befindlich: so würde dessen Werth daraus bestimmt, und seinem Werthe aus A, oder B gleich gesetzt.

Anmerk. 2.) Enthielte jede der gegebenen Gleichungen alle unbekannte Grösen; so setze man in eine derselben anstatt y, und z die gefundenen Werthe, um x zu finden.

Exempel. 1.) Drey Spieler A, B, C, haben dergestalt gewonnen, das der Gewinnst des ersten nebst $\frac{1}{2}$ der beyden übrigen ist = a.

2ten nebst $\frac{1}{2}$ = b.

3ten nebst $\frac{1}{2}$ = c.

wie viel hat jeder gewonnen?

Exempel. 2.) Drey Personen A, B, C, spielen miteinander. Im ersten Spiele verliehrt A an jeden der beyden andern

den so viel, als jeder davon Geld hat. Im zweyten thut eben dieß B, im dritten auch C. Zuletzt hat jeder 24 fl. Wie viel hatte jeder Anfangs?

Anmerk. 3.) Auf eben diese Art kann man *vier*, und *mehrere unbekannte Gröſsen*, aus eben so vielen einfachen Gleichungen finden, nur muß das *Gegebene* zu *so vielen Gleichungen* hinreichen, als *unbekannte Gröſsen* vorhanden sind; und sämmtliche blos in der *ersten Potenz* vorkommen; daher darf auch keine mit der andern *multiplicirt* seyn.

III. Von den zusammengesetzten, besonders quadratischen Gleichungen.

§. 81.

Erklärung. 1.) Eine *Gleichung* heißt *bestimmt*, determinata, worinn nur eine unbekannte Gröſse vorkömmt; und eine *Aufgabe* heißt *bestimmt*, wenn sie durch eine bestimmte Gleichung aufgelöset wird.

2.) Eine *bestimmte Gleichung* heißt *irrational*, wenn in einem, oder in mehrern die unbekannte Gröſse, unter einem Wurzelzeichen stehet; *rational* aber, wo dieses nicht ist, die Coefficienten mögen rational, oder irrational seyn.

3.) Eine *bestimmte Gleichung* heißt *Zusammengesetzt*, worinn die unbekannte Gröſse die erste Potenz übersteigt; und ist demnach von 2, 3, 4tem und höhern Grade; oder eine *quadratische*, *cubische*, *biquadratische*, und *höhere Gleichung*.

4.) Eine *zusammengesetzte Gleichung* heißt *rein*, pura, wenn darinn die *unbekannte* Gröſse blos in *einer Potenz* vorkömmt; *gemischt* aber, oder *unrein*, adfecta, wenn sie *verschiedene Potenzen* der *unbekannten* Gröſse enthält.

5.) Die *Wurzel*, radix, einer Gleichung heißt der Werth der unbekannten Gröſse in der Gleichung. Diesen *Werth finden*, heißt die *Gleichung auflösen*.

§. 82.

Aufgabe. 1.) Eine *reine* Gleichung aufzulösen.

Auflös. Die *allgemeine Form* aller *reinen* Gleichungen ist $x^n = r$; daher $x = \sqrt[n]{r}$, oder $n\,lx = lr$, folglich $lx = \frac{l.r}{n}$.

Je nachdem nun der Exponent n die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. w. bedeutet, ist auch die Gleichung *einfach*, *quadratisch*, *cubisch*, *biquadratisch* u. s. w.

Zusatz. Für eine *quadratische* Gleichung ist $x^2 = r$ folglich

$$x = \pm\sqrt{r}.$$

Exem-

Exempel. Man ſoll aus der Summe a zwoer Zahlen, und aus der Summe b ihrer Quadrate die Zahlen ſelbſt finden.

§. 83.

Aufgabe. 2.) Eine *gemiſchte quadratiſche* Gleichung aufzulöſen.

Auflöſ. Die *allgemeine Form* der *gemiſchten quadratiſchen* Gleichung iſt $x^2 \pm p\,x = q$. und hier iſt

$$x = -\tfrac{1}{2}\,p \mp \sqrt{(q \pm \tfrac{1}{4}\,p^2)}$$

Zuſatz. Jede Gleichung von der Form $x^{2m} - p\,x^m - q = o$ kann nach der Art der quadratiſchen Gleichungen aufgelöſet werden.

Anmerk. In einer *quadratiſchen* Gleichung von der Form $x^2 - p\,x \pm q = o$ ſind die *Wurzeln unmöglich*, wenn $q > \frac{1}{4}\,p^2$ iſt.

Exempel. Die Summe a zweyer Zahlen, und die Summe b ihrer Quadrate iſt, wie im Exempel §. 82. gegeben; man ſoll die Zahlen x, y, ſelbſt finden.

IV. Anwendung der Gleichungen auf die Progreſſions- und Zinſenrechnung.

§. 84.

Aufgabe. 1.) Die Gleichungen für das *letzte Glied* einer arithmetiſchen Reihe, und für die *Summe* der Reihe ſind gegeben; man

man ſoll von den *fünf Dingen* a, u, d, n, S, jede zwey aus den übrigen finden.

Aufl. I. Nach §. 53. Zuſ. 1.) iſt $u = a + (n-1)d$. Hieraus laſſen ſich folgende Gleichungen herleiten:

I.) $a = u - (n-1)d$ III.) $d = \frac{u-a}{n-1}$

II.) $u = a + (n-1)d$ IV.) $n = 1 + \frac{u-a}{d}$

2.) Nach §. 54. Zuſ. 2. iſt $S = \frac{a+u}{2}.n$; hieraus werden wieder vier Gleichungen hergeleitet:

V.) $a = \frac{2S}{n} - u$ VII.) $n = \frac{2S}{a+u}$

VI.) $u = \frac{2S}{n} - a$ VIII.) $S = \frac{a+u}{2}.n.$

3.) In der Gleichung $S = \frac{a+u}{2}.n$; ſetze man ſtatt u ſeinen Werth aus der II. Formel $u = a + (n-1)d$ und man erhält die neue Gleichung $2an + dnn - dn = 2S$. Und daraus

IX.

IX. $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$ XI. $S = (a + \frac{(n-1)}{2} d)\, n$

X. $d = \frac{2S}{(n-1)n} - \frac{2a}{n-1}$ XII. $n =$

$$= d - 2a \pm \sqrt{(8dS + (2a-d)^2)} \over 2d$$

4.) In der nämlichen Gleichung $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$, setze man aus der ersten Formel statt a seinen Werth $a = u - (n-1)d$; und man erhält die neue Gleichung $2S = 2un - dnn + dn$. Daraus;

XIII. $u = \frac{S}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$

XIV. $d = \frac{2u}{n-1} - \frac{2S}{(n-1)n}$

XV. $S = (u - \frac{(n-1)d}{2})\, n$

XVI. $n = \frac{d + 2u \mp \sqrt{(-8dS + (d+2u)^2)}}{2d}$

5.) Endlich setze man in eben derselben Formel $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$

aus

aus der IV. Form. Statt $n = 1 + \frac{u-a}{d}$ seinen Werth; man erhält die neue Gleichung $2S = a + u + \frac{u^2 - a^2}{d} = a + u + \frac{(u+a)\cdot(u-a)}{d}$

Und daraus erhält man:

XVII. $a = \frac{d \mp \sqrt{(-8dS + (d+2u)^2)}}{2}$

XVIII. $d = \frac{(u+a)\cdot(u-a)}{2S-a-u}$

XIX. $u = \frac{-d \mp \sqrt{(8dS + (2a-d)^2)}}{2}$

XX. $S = \frac{(u+a)\cdot(d+u-a)}{2d}$

Diese 20 Formeln sind in folgender Tabelle dargestellt.

Ueberblick

der

arithmetiſchen Reihen.

Gesucht	Gegeben.	Auflösung.
a.	u. d. n.	$u-(n-1)d$
	n. n. S.	$\frac{2S}{n}-u$
	d. n. S.	$\frac{S}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
	u. d. S.	$\frac{d\mp\sqrt{(8dS+(d\mp 2u)^2)}}{2}$
u.	a. d. n.	$a+(n-1)d$
	a. n. S.	$\frac{2S}{n}-a$
	d. n. S.	$\frac{S}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$
	a. d. S.	$\frac{-d\mp\sqrt{(8dS+(2a-d)^2)}}{2}$
d.	a. u. n.	$\frac{u-a}{n-1}$
	a. n. S.	$\frac{2S-2an}{(n-1)n}$

Gesucht.	Gegeben.	Auflösung.
d.	u. n. S.	$\frac{2un - 2S}{(n-1)n}$
	a. u. S.	$\frac{(u+a).(u-a)}{2S-a-u}$
n.	a. u. d.	$1 + \frac{u-a}{d}$
	a. u. S.	$\frac{2S}{a+u}$
	a. d. S.	$\frac{d-2a \mp \sqrt{(8dS+(2a-d)^2)}}{2d}$
	u. d. S.	$\frac{d+2u \mp \sqrt{-8dS+(d+2u)^2)}}{2d}$
S.	a. u. n.	$\frac{1}{2}n.(a+u)$
	a. d. n.	$\left(\frac{(n-1)d+a}{2}\right)n.$
	u. d. n.	$\frac{(u-(n-1)d)n.}{2}$
	a. u. d.	$\frac{(u+a).(d+u-a)}{2d}$

An-

Anmerk. Diese Formeln sind zwar für *steigende* Reihen gemacht; man darf aber nur das erste Glied u, und das letzte a nennen, so gelten sie auch für die *abnehmende* Reihen.

§. 85.

Aufgabe. 2.) Die Gleichungen für das *letzte Glied* einer geometrischen Reihe, und für die *Summe* der Reihe sind gegeben; man soll von den fünf Dingen a, u, e, n, S, jede zwey aus den übrigen dreyen finden.

Aufl. 1.) Nach §. 64. Zus. 1. ist $u = ae^{n-1}$. Hieraus entstehen folgende vier Formeln:

I.) $a = \frac{u}{e^{n-1}}$.

II.) $u = ae^{n-1}$.

III.) $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

IV. $n = 1 + \log. \frac{u}{a} : \log. e$

2.) Nach §. 67. ist $S = \frac{ue-a}{e-1}$. Also:

V.) $a = ue - (e-1)S$,

VI.) $u = \frac{a + (e - 1) \cdot S}{e}$

VII.) $e = \frac{S - a}{S - u}$

VIII.) $S = \frac{u e - a}{e - 1}$.

3.) Aus der Gleichung $S = \frac{u e - a}{e - 1}$ leite man die Gleichung ab; $S - a = s e - u e$; in dieſer ſetze man aus der I. Formel $a = \frac{u}{n - 1}$ ſtatt a ſeinen Werth und es entſteht die Gleichung $(S - u) e = S - \frac{u}{n - 1}$

Wird der Bruch aufgehoben, ſo erhält man $(S - u) e^n = S e^{n-1} - u$; und daraus:

IX.) $u = \frac{(e^{n-1}) \cdot (S e - S)}{e^n - 1}$

X.) $e^n - \frac{S}{S - u} e^{n-1} + \frac{u}{S - u} = 0$

XI.) $n = 1 + \log. \frac{u}{S - e(S - u)} : \log. e$

XII.) $S = \frac{u}{e^n - 1} \left(\frac{e^n - 1}{e - 1} \right)$

4.) In der obigen Gleichung $Se - ue = S - a$ setzte man aus der II. Formel $u = ae^{n-1}$ ſtatt u ſeinen Werth; man erhält dann die neue Gleichung $Se - ae^n = s - a$; und daraus folgende Formeln.

XIII.) $a = S \cdot \frac{e - 1}{e^n - 1}$

XIV. $e^n - \frac{e}{a} \cdot S + \frac{S}{a} - 1 = 0$

XV. $n = \log. \left(S \cdot \frac{e - 1}{a} + 1 \right) : \log. e.$

XVI.) $S = a \left(\frac{e^n - 1}{e - 1} \right)$

5.) Endlich in der nämlichen Gleichung $Se - ue = S - a$ ſetze man aus der dritten Formel $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ ſtatt e ſeinen Werth, und man erhält

$(S - u) \cdot \left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \right) = S - a;$

oder

oder, weil $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}}$, ſo iſt

$$(S-u).\left(\frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}}\right) = S-a; \text{ alſo}$$

$$(S-u).\left(\sqrt[n-1]{u}\right) = (S-a).\left(\sqrt[n-1]{a}\right).$$

Erhebt man dieſe Gleichung zur $n-1$ten Potenz, ſo erhält man folgende Formeln:

XVII.) $a\left((s-a)^{n-1}\right) - u\left((s-u)^{n-1}\right) = 0$

XVIII.) $u\left((S-u)^{n-1}\right) - a\left((S-a)^{n-1}\right) = 0$

XIX.) $n = 1 + \log.\frac{u}{a} : \log.\frac{S-a}{S-u}$

XX.) $S = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$

Die brauchbarern dieſer 20 Formeln ſind in folgender Tabelle dargeſtellt.

Ueberblick

der

geometrischen Reihen.

Gesucht.	Gegeben.	Auflösung.
a.	u. e. n.	$u : e^{n-1}$
	u. e. S.	$ue - S(e - 1)$
	e. n. S.	$(e - 1) S : e^n - 1$
	u. n. S.	— — — — —
u.	a. e. n.	$a e^{n-1}$
	a. e. S.	$((a + S)(e - 1)) : e$
	n. e. S.	$(Se - S)(e^{n-1}) : (e^n - 1)$
	a. n. S.	— — — — —
e.	a. u. n.	$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \log. \frac{u}{a} : (n - 1)$
	a. u. S.	$(S - a) : (S - u)$
	u. n. S.	— — — — — —
	a. n. S.	— — — — — —

Ge-

Gesucht	Gegeben.	Auflösung.
n.	a. u. e.	$1 + \log. \frac{u}{a} : \log. e$
	S. u. e.	$1 + \log. \frac{u}{S - e(S-u)} : \log. e$
	a. S. e.	$\text{Log.}\left(1 + S\left(\frac{e-1}{x}\right)\right) : \log. e$
	a. u. S.	$1 + \log \frac{u}{a} : \log. \frac{S-a}{S-u}$
S.	a. u. e.	$(ue - a) : (e - 1)$
	n. u. e.	$\frac{u}{e^n - 1}\left(\frac{e^n - 1}{e - 1}\right)$
	a. n. e.	$a(e^n - 1) : (e - 1)$
	a. n. u.	$\frac{\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$

§. 86.

Erklärung. Die Zahl, welcher ſich eine Reihe immer abnehmender Zahlen immer mehr nähert, und ſolcher, jemehr Glieder dieſer Reihe man annimmt, ſo nahe kömmt, als man will; jedoch ſie nie völlig erreicht, heiſst die Summe dieſer Reihe, die man ſich ohne Ende fortgeſetzt gedenkt, oder die *Summe der unendlichen Reihe.*

Zuſatz. 1.) Setzt man *allgemein* $e = \frac{1}{x}$, alſo $S = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots\ldots$ in infinitum, ſo iſt $S = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

$$= \frac{1}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

2.) Wechſeln in ſolcher Reihe die Zeichen der Glieder $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \ldots\ldots = A$

so theilt man so in $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x} \ldots\ldots = C$

und

und in $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \ldots = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \ldots\right)$

$$= \frac{1}{x}(1 + C) = B.$$

Demnach ist $A = B - C = \frac{1 + C}{x} - C$. Setzt man nun in der Formel Zuf. 1.) x^2 anstatt x; so ist $C = \frac{1}{x^2 - 1}$

folglich $A = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) - \frac{1}{x^2 - 1}$

$$= \frac{x^2}{x(x^2 - 1)} - \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)\,1}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \frac{1}{x + 1}$$

3.) Da $A + 2C = B - C + 2C = B + C$; so giebt $A + 2C$ eine Reihe wie A (Zuf. 2.) aber mit lauter bejahten Gliedern (Zuf. 1.)

4.) Setzt man (Zuf. 1.) $x + 2$ ſtatt x; ſo wird $S = \frac{1}{x+1}$

(und die Reihe $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} \ldots\ldots$

$= \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \ldots$ Zuf. 2.

§. 87.

Aufgabe. Ein Capital a ſteht n Jahre auf $\frac{q}{r}$ Zinſen, welche jährlich dazu geſchlagen werden, wie groſs wird nach Verlauf dieſer Zeit ſein Werth S ſeyn?

Auflöſ.

I.) $\text{Log. } S = \text{log. } a + n \text{ log. } \left(\frac{r+q}{r}\right)$

$a = 1000$ fl; $n = 20$; $\frac{q}{r} = \frac{5}{100}$

II.) $\text{Log. } a = \text{log. } S - n \text{ log. } \left(\frac{r+q}{r}\right)$

(S = 1000 fl. iſt nach n Jahren ohne Zinſen gefällig; wie groſs iſt ſein jetziger Werth a? oder

ich

ich will nach n Jahren 10000 fl; wie viel Capital a ist dazu nöthig?

III.) $\text{Log.}\,(r+q) = \dfrac{\log. S - \log. a + n \log. r}{n}$

Es sey S = 1000 nach n = 10 Jahren gefällig, und werde verkauft für a = 6756; wie viel Procent? Oder: aus 6 Menschen nach der Sündfluth war nach 200 Jahren eine Million geworden; wie gros war jährlich die Bevölkerung?

IV.) $n = \dfrac{\log. S - \log. a}{\log.\left(\dfrac{r+q}{r}\right)}$

a = 1000 bringt S = 2500
zu 5 Procent; wie viel Jahre?

§. 88.

Aufgabe. Ein Capital a steht unter vorigen Bedingungen, und wird am Ende eines jeden Jahres mit einem Capital b, unter eben den Bedingungen vermehrt; wie gros ist der gesammte Werth T nach n Jahren?

Auf- I.) $T = \dfrac{a\,q + b\,r}{q} \cdot \left(\dfrac{r+q}{r}\right)^n - \dfrac{b(r+q)}{q}$

 Nimmt

Nimmt man b = a, dafs aus T, R wird: so ist

II.) $R = a \cdot \frac{r+q}{q} \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^n - a\,\frac{r+q}{q}$

III.) $a = \frac{R\,q}{(r+q)\cdot\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - r+q}$

R = 10000 fl. nach n = 20 Jahren, ohne Zinsen gefällig, soll so abgewogen werden, dafs jährlich nicht nur die Summe a bezahlt wird; sondern auch, dafs a jährlich mit den Zinsen, und mit a vermehrt, nach n Jahren R bringt, wie grofs mufs a seyn?

IV.) $n = \frac{\log.(R\,q+a\,r+a\,q) - \log.(a\,r+a\,q)}{\log.\left(\frac{r+q}{r}\right)}$

Ich zahle wie zuvor jährlich a; in wie viel Jahren ist R abgetragen?

§. 89.

Aufgabe. Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu geniefsen, und will sie verkaufen, welches ist ihr jetziger Werth P?

Aufl.

Aufl. 1.) $P = \frac{ar}{q} - \frac{ar}{q} \cdot \left(\frac{r}{r+q}\right)^n$

Für eine jährliche Rente a auf n Jahre muſs ich der allgemeinen Leihebank das Capital P zahlen; wo freylich $a > P \cdot \frac{q}{r}$ als die Zinſen

II.) $a = \frac{P\,q}{r\left(\frac{r}{r+q}\right)^n}$

Für das Capital P erhalte ich auf n Jahre die Rente a. Oder: wie groſs iſt für das Capital P die Leibrente a, wenn die Bank meine Lebenszeit n Jahre ſchätzt, und q Zinſen zahlt? Oder: eine Schuld P, die jährlich mit q Procent zu verzinſen iſt, ſoll in n Jahren abgetragen ſeyn, wenn jährlich eine gleiche Summe a gezahlt wird?

III.) $n = \frac{\log.(ar - Pq) - \log. ar}{\log. r - \log.(r+q)} = \frac{\log. ar - \log.(ar - Pq)}{\log.(r+q) - \log. r}$

Für das Capital P zu q Procent genieſse ich die Rente a

die

die gröſser als die Zinſen $\frac{q}{r}$, nach wie viel Jahren wird das ganze Capital verzehrt ſeyn?

V. Von den unbeſtimmten Gleichungen.

§. 90.

Erklärung. 1.) Eine *Gleichung* heiſst *unbeſtimmt*, wenn ſie mehr als eine unbekannte Gröſse enthält; und eine *Aufgabe* heiſst *unbeſtimmt*, wenn ſie durch eine unbeſtimmte Gleichung aufgelöſet wird.

— — — 2.) Eine *unbeſtimmte Aufgabe* iſt *einfach*, wenn die unbekannten Gröſsen nur in der erſten Potenz, auch nicht miteinander multiplicirt darinnen vorkommen: *zuſammengeſetzt* hingegen, welche höhere Potenzen, oder auch Produkte der unbekannten Gröſsen enthält.

— — — 3.) Die Lehre von Auflöſung unbeſtimmter Aufgaben, heiſst die *unbeſtimmte Analytik*, welche zur Uebung des Verſtandes, und zu gröſserer Fertigkeit in analytiſchen Rechnungen ſehr dienlich iſt.

§. 91.

Aufgabe. 1.) *Einfache unbeſtimmte* Aufgaben aufzulöſen.

Auflöſ.

Aufl. Bey diesen kömmt die Hauptsache darauf an,

1.) dass man von den gesuchten Grösen einige, welche man will, und so viele, als die Zahl der Gleichungen es verstattet, zugleich aber auch die Einschränkungen bestimme, denen die übrigen nicht zu bestimmenden unterworfen sind;

2.) dass man hierauf diesen übrigen alle mögliche Werthe, welche mit obgedachten Einschränkungen bestehen können, beylege;

3.) dass man endlich diese Werthe in die bereits gefundenen Endgleichungen, einen nach dem andern, übertrage, um der vorgelegten Aufgabe durch die verschiedenen möglichen Auflösungen ein Genüge zu leisten.

Beyspiele.

1.) Für 20 Rthlr sollen 20 Maas Wein von viererley Sorten gekauft werden; Ungerscher p Maas zu 4 Rthlr. Champagner q M. zu 2 Rthlr. Rheinwein r M. zu 1 Rthlr. und Frankenwein S M. zu $\frac{1}{2}$ Rthlr.

2.) Es sollen für 20 Rthlr ein Dutzend Paar Strümpfe eingekauft werden; seidne p Paare zu 3 Rthlr; feine wollene q Paare, zu 1 Rthlr; und baumwollene 1 Paar zu $\frac{1}{2}$ Rthlr.

3.) Ein Münzmeister hat dreyerley Silber, 14, 11, und 9 lö-

thiges, und ſoll 30 Mark 12 löthiges daraus machen. Wie viel Mark muſs er von jeder Sorte nehmen?

§. 92.

Aufgabe. 2.) Eine *zuſammengeſetzte unbeſtimmte* Aufgabe aufzulöſen.

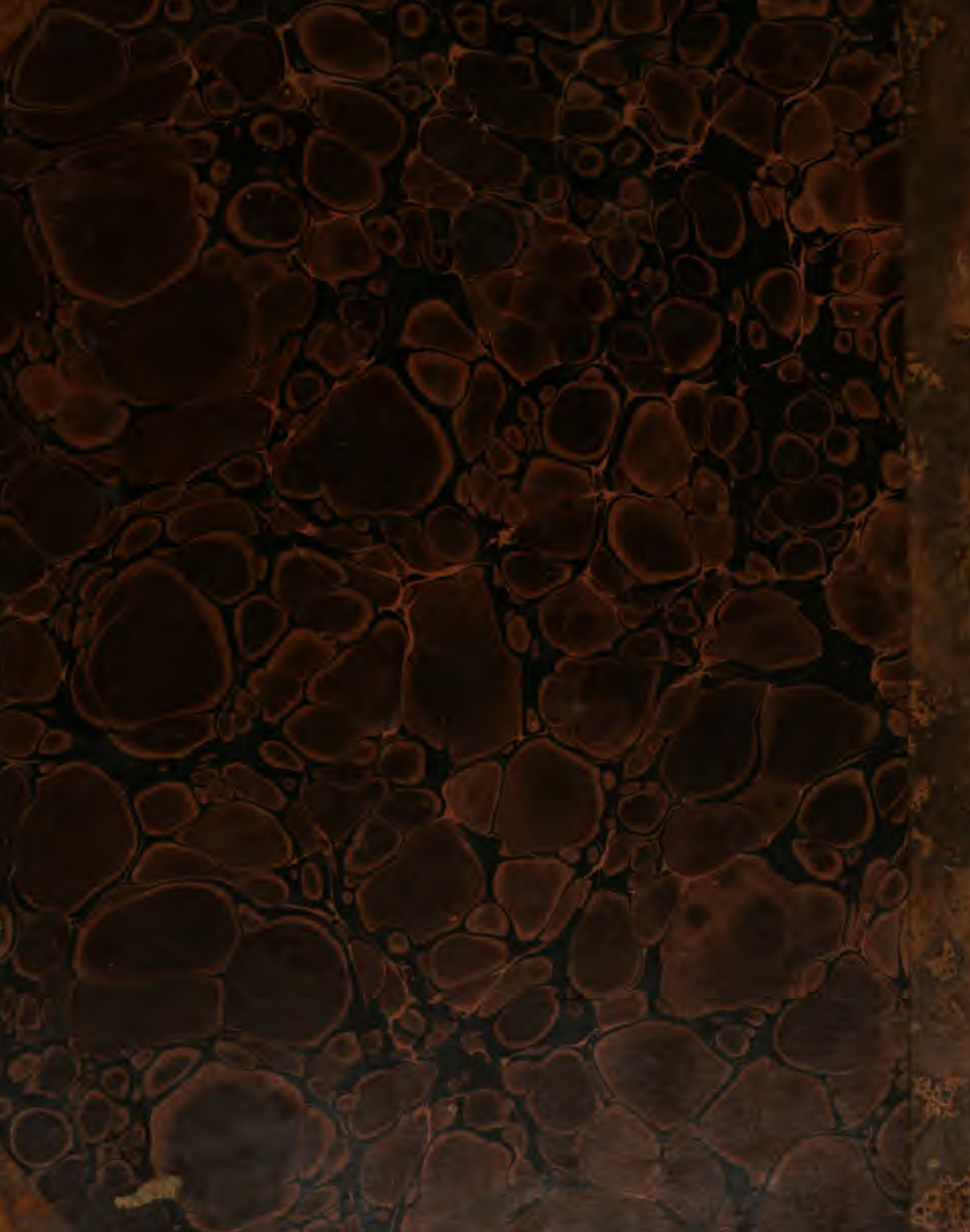
Auſl. Hier ſind zwey Fälle möglich:

1.) der *leichtere*, daſs die eine unbekannte Gröſse y, in der erſten, die übrigen aber, als x, in höhern Potenzen vorkommen. In dieſem Falle hat man zwar Formeln zur Berechnung, ſie ſind aber, weil es ſich nicht oft ſo trift, ſelten anzuwenden.

2.) Der gewöhnlichere, daſs auch y, und demnach alle unbekannte Gröſsen x; u. ſ. w. in höhern Potenzen vorhanden ſind. In dieſem Falle kömmt, wenn man y beſtimmt, x u. ſ. w. in der zweyten, und noch höhern Potenzen hinter das Wurzelzeichen; da denn die Hauptſache darauf beruhet, ſölche Werthe für x ausfündig zu machen, daſs die Wurzelzeichen oder die Irrationalität eliminirt werden.

Beyſpiele.

1.) Man ſoll zwey Quadratzahlen finden, deren Differenz auch eine Quadratzahl iſt.

2.) Man ſoll eine Quadratzahl x^2 finden, welche von einer Quadratzahl a^2 ſubtrahirt, zur Differenz eine Quadratzahl y^2 habe.

3.) Man ſoll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe auch eine Quadratzahl iſt; doch ſollen alle ganze Zahlen ſeyn.